Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14. Canale 3.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 20/01/14.
23^{mo}. SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.
Abbiamo visto che due rette r e ρ di equazione rispettivamente

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0 \end{cases} .$$

sono *complanari* se e soltanto se la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero. Il rango di questa matrice è quindi uguale a 2 oppure uguale a 3 (non può essere certo uguale 1 perché siamo partiti da due rette ben definite). Le due rette coincidono se e solo se il sistema dato dalle 4 equazioni in **3** incognite ha uno spazio di soluzioni, che sappiamo essere uno spazio affine, di dimensione 1. Ma 1=**3**-2. Applicando anche il teorema di Rouché-Capelli vediamo quindi che le due rette sono coincidenti se e solo se

$$(1) \qquad rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2\,,$$

Le due rette si incontrano in un punto, cioè in un sottospazio affine di dimensione 0 (e vi faccio notare che 0=**3**-3) se e solo se

$$(2) \qquad rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 3\,,$$

Infine, le due rette sono parallele se e solo se il sistema non ha soluzione e ciò può accadere, sempre per Rouché-Capelli, se e solo se

$$(3) \qquad rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3 \quad rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2$$

Soluzione esercizio 2.
Il piano generico per la retta s ha equazione cartesiana

$$\lambda(x+2z-1)+\mu(y-z+2)=0$$

che riscriviamo nella forma:

$$\lambda x+\mu y+(2\lambda-\mu)z+(-\lambda+2\mu)=0\,.$$

La direzione ortogonale a questo piano è $\mathbb{R}(\lambda,\mu,2\lambda-\mu)$ mentre la direzione ortogonale al piano σ è $\mathbb{R}(2,1,-3)$. Il piano cercato si ottiene determinando λ

e μ in modo tale che queste due direzioni siano ortogonali; basta imporre che $<(\lambda, \mu, 2\lambda - \mu), (2, 1, -3)> = 0$; otteniamo l'equazione $\lambda - \mu = 0$ che ammette la soluzione $\lambda = 1$, $\mu = 1$ a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo. Il piano cercato ha quindi equazione

$$x + y + z + 1 = 0\,.$$

Soluzione esercizio 3.
Determiniamo P_σ. La retta per P ortogonale a σ è la retta di parametri direttori $(1, 1, 1)$ e passante per P. I suoi punti sono descritti da

$$\{(2 + t, -1 + t, 2 + t)\ , t \in \mathbb{R}\}$$

L'intersezione della retta con il piano è costituita dai punti della retta che soddisfano l'equazione del piano; cerchiamo allora per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $(2 + t, -1 + t, 2 + t)$ soddisfa l'equazione cartesiana di σ. Basta imporre che sia

$$(2 + t) + (-1 + t) + (2 + t) = 1$$

il che dà l'equazione $3t + 3 = 1$ che ha soluzione $t = -2/3$. Quindi, sostituendo, otteniamo che P_σ ha coordinate $(4/3, -5/3, 4/3)$.