Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14. Canale 3.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 17/01/14 (22mo compito)
Soluzioni.

Parte I e Parte II.

Soluzione esercizio 4.
(4.1)+ (4.2) Applicare meccanicamente le formule viste a lezione tenendo conto che una base per il sottospazio giacitura di π è dato da $\underline{v} = P_2 - P_1 = (-1, 1, 0)$, $\underline{v}' = P_3 - P_1 = (-1, 0, 1)$ (scriviamo brevemente $P - Q$ per $\overline{OP} - \overline{OQ}$).
(4.3) Prendere il fascio improprio definito dall'equazione di cui in 4.1 e imporre il passaggio per P. Il fascio improprio definito da un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è, per definizione, la famiglia dei piani paralleli a tale piano e cioè, per quanto visto a lezione e/o negli appunti [1], la famiglia $\{ax+by+cz+k = 0, k \in \mathbb{R}\}$. Determinate k imponendo il passaggio per P.

Soluzione esercizio 5. Il piano coordinato yz ha equazioni $x = 0$. Il fascio di piani paralleli al piano coordinato yz ha equazione $x = d$, al variare di $d \in \mathbb{R}$. L'equazione cercata è allora $x = 2$.

Soluzione esercizio 7. Parametri direttori $l = 2, m = -1, n = 1$. Eq. cart.: possiamo ad esempio ricavare t dalla seconda equazione, $t = -y - 2$, e sostituirlo nella prima e terza equazione. Otteniamo

$$\begin{cases} x - 2(-y-2) - 1 = 0 \\ z - (-y-2) - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni non sono univocamente determinate (una retta è l'intersezione di infinite coppie distinte di piani, pensate allo spigolo di un libro). Ovviamente, possiamo anche sfruttare il fatto che deve essere

$$\text{rg} \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{1}$$

Ciò è equivalente a

$$\begin{cases} \det \begin{vmatrix} x-1 & y+2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \det \begin{vmatrix} x-1 & z-3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

e queste *sono* equazioni cartesiane (sviluppando il determinante). Possiamo anche considerare

$$\left| \begin{array}{c|c} 2 & x-1 \\ -1 & y+2 \\ 1 & z-3 \end{array} \right|$$

ridurre con Gauss e imporre la compatibilità.

Soluzione esercizio 8. Basta risolvere esplicitamente il sistema omogeneo associato. Le equazioni parametriche di s le scriviamo immediatamente e da quelle le equazioni cartesiane.

[1] Vedere la Proposizione 1

Soluzione esercizio 9. Basta considerare il fascio di piani per la retta data ed imporre il passaggio per il punto $(0, 2, 0)$. Il fascio di piani ha equazioni

$$\lambda(x - z - 3) + \mu(y + 2z - 1) = 0$$

al variare di (λ, μ) in $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Imponendo il passaggio per $(0, 2, 0)$ si ottiene $-3\lambda + \mu = 0$ che ha soluzione $\lambda = 1$, $\mu = 3$ (a meno di un comune fattore di proporzionalità $t \in \mathbb{R} \setminus 0$). Risostituendo questi valori nell'equazione qui sopra, scopriamo che il piano cercato ha quindi equazione $x + 3y + 5z - 6 = 0$.

Soluzione esercizio 10. Dalle equazioni cartesiane di r possiamo scrivere il fascio di piani per r; imponendo il parallelismo con $(11, 0, -1)$ otteniamo un'equazione lineare omogenea in λ e μ e poi procediamo come nell'esercizio 9.

Soluzione esercizio 11. Notiamo che il punto non appartiene alla retta; il problema è quindi ben posto. Si può procedere in (almeno) due modi: si determinano 2 punti distinti sulla retta e si utilizza l'equazione del piano per 3 punti non allineati. Si può altrimenti scrivere l'equazione cartesiana della retta e procedere come nell'Es. 9.

Parte III.

Soluzione esercizio 1. I vettori direttori delle 2 rette sono 2 vettori di giacitura per il piano; abbiamo quindi un punto e due vettori di giacitura. A questo punto si procede come al solito: le equazioni parametriche del piano sono

$$(x, y, z) = Q_0 + t\underline{v} + s\underline{w}$$

con $\underline{v}$ e $\underline{w}$ vettori direttori delle due rette date, ovvero $\underline{v} = (-3, 4, 1)$ e $\underline{w} = (1, 1, 4)$. Un'equazione cartesiana del piano cercato è dunque

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 1 \\ y-2 & 4 & 1 \\ z+1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

ovvero

$$15x + 13y - 7z - 48 = 0.$$

Soluzioni esercizio 2. Un semplice ragionamento mostra che la retta cercata è l'intersezione del piano π e del piano per Q e s. Quest'ultimo piano si ottiene con il metodo del fascio; mettendo poi a sistema con l'equazione cartesiana di π si ottengono le equazioni della retta cercata. Esplicitamente, il facio di piani contenenti la retta s è

$$\lambda(x - 2z + 4) + \mu(2y - z) = 0, \qquad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Imponendo il passaggio per Q otteniamo l'equazione

$$5\lambda - \mu = 0$$

e possiamo prendere $(\lambda, \mu) = (1, 5)$. Ogni altra soluzione differisce da questa solo per un fattore scalare, dunque tutte le soluzioni corrispondono allo stesso piano in $\mathbb{R}^3$. L'equazione che otteniamo con la scelta $(\lambda, \mu) = (1, 5)$ è

$$x + 10y - 7z + 4 = 0$$

La retta cercata ha dunque equazioni

$$\begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x + 10y - 7z + 4 = 0 \end{cases}$$