Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14. Canale 3.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 14/01/14 (ventunesimo compito). Soluzioni.

Soluzione esercizio 1. La matrice simmetrica associata al prodotto scalare nella base canonica è

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e quindi $b(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{w}^T A \underline{v}$, con A uguale a questa matrice (dove abbiamo anche usato la ovvia osservazione che una n-pla $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^4$ coincide con le sue coordinate rispetto alla base canonica). Per diagonalizzare b basterà determinare una base *ortonormale* di autovettori per A. È subito visto che $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 2)$ e che quindi A ammette gli autovalori $\lambda_1 = \sqrt{2}$, con $m_a(\sqrt{2}) = 1$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, con $m_a(-\sqrt{2}) = 1$, $\lambda_3 = 0$, con $m_a(0) = 2$ (uso qui la notazione m_a per la molteplicità algebrica di un autovalore). Si verifica senza difficoltà che $V_{\sqrt{2}} = \mathbb{R}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1, 0)$, $V_{-\sqrt{2}} = \mathbb{R}(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1, 0)$ e $V_0 = \mathrm{Span}((-1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$.
Questi 4 vettori costituiscono una base ortogonale di autovettori; la base ortonormale di autovettori cercata è quindi

$$\underline{w}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,,\ \underline{w}_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,,\ \underline{w}_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\,,\ \underline{w}_4 = (0, 0, 0, 1)\,.$$

Sappiamo dalla teoria svolta che questa base, denotiamola con $\mathcal{W}$, diagonalizza il prodotto scalare $b(\ ,\ )$; più precisamente

$$A_b^{\mathcal{W}} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ne deduciamo che $b(\ ,\ )$ è indefinita; infatti $b(\underline{w}_1, \underline{w}_1) > 0$ mentre $b(\underline{w}_2, \underline{w}_2) < 0$. Infine, $b(\ ,\ )$ è degenere ed il suo nucleo è uguale all'autospazio V_0.
Osservazione: per concludere che $b(\ ,\ )$ era indefinita bastava verificare che esistevano due autovalori non nulli di segno discorde; non c'era bisogno di calcolare esplicitamente la base ortonormale di autovettori.