Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14.
Prof. P. Piazza

Compito del 11/1/2014 (ventesimo compito)

Esercizio 1. Sia
$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

1.1 Dimostrare, senza fare alcun conto, che l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da A è diagonalizzabile.
1.2 Determinare una matrice **ortogonale** B, $B \in O(4)$, tale che $\Delta := B^{-1}AB$ sia diagonale.
1.3 Calcolare A^{1223}.
Suggerimento: Δ^{1223} è facilmente calcolabile. Come sono collegati A^{1123} e Δ^{1223} ? Utilizzare **1.2**.

Osservazioni preliminari per l'esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale (o più in generale su un campo $\mathbb{K}$) e sia $F : V \to V$ un endomorfismo, $F \in \mathrm{End}(V)$; sia W un sottospazio di V. Diremo che W è *un sottospazio invariante* per F (o *rispetto a* F) se $F(W) \subseteq W$. Abbiamo già visto questa nozione nella dimostrazione del teorema spettrale. Se W è un sottospazio invariante, possiamo definire *la restrizione* di F a W: $F|_W \in \mathrm{End}(W)$. Questa è l'applicazione lineare $W \to W$ che associa a $\underline{w} \in W$ il vettore $F(\underline{w})$ (essendo W invariante ne segue che $F(\underline{w}) \in W$). [1]

Esercizio 1bis. (molto facile). Verificare che se $\underline{v}$ è un autovettore di F allora $\mathbb{R}\underline{v}$ è una retta invariante. Verificare che, viceversa, se $r \subset V$ è una retta invariante per $F \in \mathrm{End}(V)$ allora r è generata da un autovettore per F. Verificare che ogni autospazio è un sottospazio invariante. Verificare che $\mathrm{Im}(F)$ è un sottospazio invariante.

Esercizio 2. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l' operatore lineare definito dalla matrice
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

(2.1) Verificare che i vettori $\underline{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\underline{v}_2 = (2, 1, -1)$ costituiscono una base di $\mathrm{Im}T$.

(2.2) *Sia* W*, per definizione, il sottospazio* $\mathrm{Im}(T)$: $W := \mathrm{Im}T$. Sappiamo che W è un sottospazio invariante per T. Consideriamo la restrizione di T al sottospazio invariante W. Denotiamo come al solito questa restrizione con $T|_W$. Determinare la matrice associata a $T|_W$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ di W.

[1] Ad esempio, sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia R_θ è l'operatore di rotazione di un angolo $\theta \in (0, \pi)$ attorno ad un asse $\mathbb{R}\underline{v}$. R_θ è un'applicazione lineare ed è chiaro geometricamente che il piano ortogonale a $\mathbb{R}\underline{v}$, e cioè il piano vettoriale $W = (\mathbb{R}\underline{v})^\perp$, è invariante per R_θ. Fate una figura nel caso $\underline{v} = (0, 0, 1)$. La restrizione di R_θ a questo piano invariante W è l'operatore di rotazione di un angolo θ in W. Notate che in questo caso il piano $(\mathbb{R}\underline{v})^\perp$ è invariante per R_θ ma in $(\mathbb{R}\underline{v})^\perp$ non ci sono rette invarianti o, equivalentemente, non ci sono autovettori. Fate una figura e convincetevi di tutto ciò ragionando geometricamente. In particolare, la restrizione di R_θ a $(\mathbb{R}\underline{v})^\perp$ non è diagonalizzabile.

(2.3) Stabilire se $T|_W : W \longrightarrow W$ è diagonalizzabile.