**Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14. Canale 3**
**Prof. P. Piazza**
**Soluzioni del compito del 11/1/2014 (ventesimo compito).**

**Soluzione esercizio 1.** La matrice $A$ è simmetrica e quindi $F_A$ è un operatore simmetrico per il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^4$. Per il Teorema spettrale possiamo concludere che $F_A$ è diagonalizzabile (anzi, più precisamente, sappiamo che esiste una base di autovettori che è ortonormale). Calcolando il polinomio caratteristico si scopre che $F_A$ ammette gli autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica rispettivamente 2 e 2.
Determiniamo gli autospazi:

$$V_1 = \operatorname{Ker}(A - 1I_4) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \},$$

$$V_0 = \operatorname{Ker}A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \}.$$

Osserviamo che questi autospazi hanno entrambi dimensione 2, come deve essere dato che $F_A$ è diagonalizzabile.

Per rispondere al secondo quesito dobbiamo determinare una base ortonormale di autovettori. Si ha subito

$$V_1 = \operatorname{Span}((1,0,0,1),(0,1,1,0)), \quad V_0 = \operatorname{Span}((1,0,0,-1),(0,1,-1,0)).$$

Questi quattro vettori sono già ortogonali; vediamo quindi che una base ortogonale di autovettori è data da

$$\underline{v}_1 = (1,0,0,1), \ \underline{v}_2 = (0,1,1,0), \ \underline{v}_3 = (1,0,0,-1), \ \underline{v}_4 = (0,1,-1,0)$$

mentre una base ortonormale $\mathcal{W}$ è data da

$$\underline{w}_1 = (1/\sqrt{2},0,0,1/\sqrt{2}), \ \underline{w}_2 = (0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0),$$
$$\underline{w}_3 = (1/\sqrt{2},0,0,-1/\sqrt{2}), \ \underline{w}_4 = (0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)$$

La matrice associata ad $F_A$ nella base di autovettori è uguale alla matrice diagonale

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sia $B$ la matrice che ha come colonne le coordinate degli autovettori $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ nella base canonica: questa è la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base $\mathcal{W}$; dato che le due basi sono ortonormali si ha che $B \in O(4)$. D'altra parte, sappiamo, dalla teoria, che

$$\Delta = B^{-1}AB$$

Dato che $\Delta$ è diagonale abbiamo risposto a **1.2**.
Consideriamo ora **1.3**: sappiamo che $\Delta = B^{-1}AB$ e ne segue quindi, moltiplicando a sinistra per $B$ e a destra per $B^{-1}$ che $A = B\Delta B^{-1}$ e quindi, in definitiva,

$$A^{1224} = (B\Delta B^{-1})^{1224} = B\Delta^{1224}B^{-1} = B\Delta B^{-1} = A$$

dove abbiamo ovviamente utilizzato ripetutamente il fatto che $BB^{-1} = B^{-1}B = I_4$ ed il fatto che, in questo caso particolare, $\Delta^k = \Delta \ \forall k \in \mathbb{N}$.

**Soluzione esercizio 1bis.** Sono tutte domande molto semplici.
Se $\underline{v}$ è un autovettore associato all'autovalore $\lambda$ e $\underline{w} \in \mathrm{Span}(\underline{v})$ allora $\underline{w} = \mu\underline{v}$ e quindi

$$T(\underline{w}) = T(\mu\underline{v}) = \mu T(\underline{v}) = \mu\lambda\underline{v}$$

Ne segue che $T(\underline{w}) \in \mathrm{Span}(\underline{v})$ e quindi $\mathrm{Span}(\underline{v})$ è invariante.
Viceversa, se $r$ è invariante per $T$ e $r = \mathrm{Span}(\underline{u})$, $\underline{u} \neq \underline{0}$, allora $T(\underline{u}) \in \mathrm{Span}(\underline{u})$ e quindi esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(\underline{u}) = \lambda\underline{u}$. Ne segue che $\underline{u}$ è un autovettore.
Se $V_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{Id}_V)$ è un autospazio associato a $\lambda$ e $\underline{w} \in V_\lambda$ allora $T(\underline{w}) = \lambda\underline{w}$ che è ancora un elemento di $V_\lambda$. Quindi $V_\lambda$ è invariante per $T$.
Infine è ovvio che se $\underline{w} \in \mathrm{Im}(T)$ allora $T(\underline{w})$, l'immagine di $\underline{w}$ tramite $T$, è ancora in $\mathrm{Im}(T)$; ne segue che $\mathrm{Im}(T)$ è invariante per $T$.

**Soluzione esercizio 2.**
(2.1) Sia $A$ la matrice che definisce $T$. È subito visto che $A$ ha rango 2 e quindi $\mathrm{Im}(T)$ ha dimensione 2. Notiamo poi che $\underline{v}_1$ è la somma delle prime due colonne di $A$ e che $\underline{v}_2$ è la somma della seconda e terza colonna di $A$. Ne segue che $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathrm{Im}(T)$; essendo non paralleli ne segue che sono una base di $\mathrm{Im}(T)$.
(2.2) Sia $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ la fissata base di $\mathrm{Im}(T)$. Per semplificare la notazione, poniamo $T|_W = T'$; sia $A'$ la matrice associata a $T'$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Per determinare $A'$ basta esprimere

$$T'\underline{v}_1 = \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 \qquad T'\underline{v}_2 = \gamma\underline{v}_1 + \delta\underline{v}_2$$

perché allora, per definizione di matrice associata ad un endomorfismo in una fissata base, si avrà:

$$A' = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$$

Si ha

$$T'\underline{v}_1 = T\underline{v}_1 = A\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

e, analogamente, $T'\underline{v}_2 = (1, 3, 2)$. Rimane quindi da esprimere $(2, 3, 1)$ e $(1, 3, 2)$ in funzione di $\underline{v}_1$ $\underline{v}_2$: impostando i due semplici sistemi

$$\begin{cases} 2 = \alpha + 2\beta \\ 3 = 2\alpha + \beta \\ 1 = \alpha - \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = \gamma + 2\delta \\ 3 = 2\gamma + \delta \\ 2 = \gamma - \delta \end{cases}$$

e risolvendo in $\alpha, \beta$ e $\gamma, \delta$ si trova

$$A' = \begin{vmatrix} 4/3 & 5/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{vmatrix}$$

(2.3) Calcolando il polinomio caratteristico $\det(A' - \lambda\,\mathrm{Id})$ si verifica che $T'$ ha gli autovalori *reali* e *distinti* ed è quindi diagonalizzabile.