Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 08/01/2014 (diciannovesimo compito)

Osservazione preliminare. La nozione di autovalore ed autovettore può essere data per un operatore lineare $T : V \to V$, con V uno spazio vettoriale su un qualsiasi campo $\mathbb{K}$. Il capitolo 13 del libro di testo sviluppa la teoria in questa generalità (in particolare possiamo considerare un endomorfismo di uno spazio vettoriale complesso). Leggete ora il criterio di diagonalizzabiilità, Teorema 13.9[1]

Esercizio 1. Sia $F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

1.1 Verificare che F_A non è diagonalizzabile.
1.2 Sia ora $F_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'applicazione lineare definita su $\mathbb{C}^2$ da A:

$$F_A^{\mathbb{C}} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}$$

(stessa definizione di F_A ma su $\mathbb{C}^2$); studiare la diagonalizzabilità di $F_A^{\mathbb{C}}$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{K}$ un qualsiasi campo e sia $A \in M_{n\,n}(\mathbb{K})$ la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Verificare che $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ non è diagonalizzabile. (Abbiamo visto un caso particolare di questo esempio a lezione.)

Esercizio 3. Sia $\mathbb{K}$ un qualsiasi campo e sia $B \in M_{n\,n}(\mathbb{K})$ la matrice

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(e quindi $B = A + I_n$).
Verificare che $L_B : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ non è diagonalizzabile.

Domanda: che cosa deduciamo da questi ultimi due esempi ?

Esercizio 4. Sia $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione di $\pi/2$ is senso anti-orario e cioè l'applicazione definita da

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

[1] la condizione (ii) in quel teorema deve essere enunciata più precisamente come segue:
(ii) il polinomio caratteristico $P_T(\lambda)$ ammette n radici in $\mathbb{K}$ contate con la loro molteplicità e per ogni radice si ha che la molteplicità geometrica etc etc...

Abbiamo verificato a lezione che L_A non è diagonalizzabile. Consideriamo ora $L_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ e cioè

$$L_A^{\mathbb{C}} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}$$

4.1 Verificare che $L_A^{\mathbb{C}}$ è diagonalizzabile.
4.2 Determinare una matrice diagonale $\Delta \in M_{2\,2}(\mathbb{C})$ e una matrice invertibile $B \in GL_2(\mathbb{C})$ tali che

$$\Delta = B^{-1} A B$$