Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14. Canale 3
Prof. P. Piazza
Soluzione compito a casa del 8/1/2014 (diciannovesimo compito)

Soluzione esercizio 1. Il polinomio caratteristico di F_A è $\lambda^2+2\lambda+2$ che ha radici complesse coniugate $\lambda_1 = -1+i$ e $\lambda_2 = -1-i$. Dato che il polinomio caratteristico di F_A non ha radici reali ne segue che F_A non ammette autovalori ne segue che F_A non è diagonalizzabile. D'altra parte $F_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ è diagonalizzabile: infatti $F_A^{\mathbb{C}}$ ha ancora polinomio caratteristico $\lambda^2+2\lambda+2$; quindi $F_A^{\mathbb{C}}$ ammette 2 autovalori *distinti* ed è quindi diagonalizzabile (perché autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti). La matrice diagonale associata a $F_A^{\mathbb{C}}$ è la matrice

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{vmatrix}$$

Notiamo che

$$V_{-1+1} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, z_1 - iz_2 = 0\} = \text{Span} \begin{vmatrix} 1 \\ -i \end{vmatrix} \equiv \mathbb{C} \begin{vmatrix} 1 \\ -i \end{vmatrix}$$

$$V_{-1-i} = \text{Span} \begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix} \equiv \mathbb{C} \begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix}$$

Quindi esiste una base di autovettori data da (utilizzando la notazione per righe)

$$\underline{v}_1 = (1, -i)\,, \quad \underline{v}_2 = (1, i)$$

Inoltre la matrice

$$B := \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{vmatrix}$$

è tale che

$$\Delta = B^{-1}AB \quad \text{in} \quad M_{2\,2}(\mathbb{C})\,.$$

Soluzione esercizio 2. Il polinomio caratteristico di A è $P_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n$ e quindi 0 è il solo autovalore, con molteplicità algebrica n. L'autospazio relativo a questo autovalore è il nucleo di L_A. Se esistesse una base di autovettori per L_A questa dovrebbe essere cercata nell'unico autospazio; me se essa esistesse allora (facile) dovrebbe essere necessariamente $\text{Ker}L_A = \mathbb{K}^n$ e quindi L_A sarebbe l'applicazione nulla. Ma L_A non è l' applicazione nulla; ne segue che L_A non è diagonalizzabile.
In alternativa, se L_A fosse diagonalizzabile allora esisterebbe una matrice $C \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che

$$0 = C^{-1}AC$$

dove a sinistra c'e' la matrice nulla $n \times n$. Ma allora A sarebbe lei stessa la matrice nulla (moltiplicare ambo i membri per C a sinistra e per C^{-1} a destra) il che non è.
Ancora in alternativa: l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 0$ è il nucleo di A che ha dimensione $n - rg(A)$. Ma A ha rango $(n-1)$ (perché ImA è lo span dei primi $n-1$ vettori della base canonica). Ne segue che la molteplicità geometrica dell'auovalore 0 è 1 e quindi $1 = m_g(0) < m_a(0) = n$; per il criterio vediamo che A non è diagonalizzabile.

Soluzione esercizio 3. Il polinomio caratteristico di B è $P_B(\lambda) = (1-\lambda)^n$ e quindi 1 è il solo autovalore, con molteplicità algebrica n. Se B fosse diagonalizzabile allora esisterebbe una matrice $C \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che

$$I_n = C^{-1}BC$$

Moltiplicando ambo i membri per C a sinistra e C^{-1} a destra otterremmo che $B = I_n$ il che non è.
In alternativa l'autospazio relativo all'unico autovalore $\lambda = 1$ è $\mathrm{Ker}(B - I_n) = \mathrm{Ker}A$ con A la matrice dell'esercezio precedente; quindi $m_g(1) = 1 < n = m_a(1)$ e L_B non è diagonalizzabile.

Soluzione esercizio 4. Il polinomio caratteristico di $L_A^{\mathbb{C}}$ è uguale a $\lambda^2 + 1$ che ha radici $\pm i$. Dato che $L_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ammette due autovalori distinti, ne segue che L_A è diagonalizzabile. La matrice associata a $L_A^{\mathbb{C}}$ in una base di autovettori è la matrice

$$\Delta := \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix}.$$

L'autospazio V_i è uguale al nucleo di $A - iI_2$ che è dato dalle coppie $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tali che

$$-iz_1 + z_2 = 0 \quad \text{e} \quad -z_1 - iz_2 = 0$$

ma (ovviamente) la seconda equazione è proporzionale alla prima. Quindi V_i è dato dalle coppie $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tali che $-iz_1 + z_2 = 0$. Quindi

$$V_i = \mathrm{Span}\begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix} \equiv \mathbb{C}\begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix}.$$

Analogamente $V_{-i} = \mathbb{C}\begin{vmatrix} i \\ 1 \end{vmatrix}$. Quindi la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base $\{\begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} i \\ 1 \end{vmatrix}\}$, e cioè la matrice

$$B = \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix}$$

è tale che

$$\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} = B^{-1}AB\,.$$