Matematica III.
Statistica Gestionale. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 16 Ottobre 2014 (terzo compito)

October 23, 2014

Gli esercizi contrassegnati con un asterisco sono di ripasso.

Osservazione. Abbiamo capito a questo punto del corso che dimostrare l'esistenza di un limite di una funzione di più variabili può essere difficile. Supponiamo di voler dimostrare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$. Possiamo utilizzare coordinate polari (ρ, θ) con

$$x = \rho \cos\theta\,, \quad y = \rho \sin\theta\,, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Si consulti il libro di testo a pagina 232 per le coordinate polari.
Se riusciamo a dimostrare che per ogni (x,y) nel dominio di f

$$|f(x,y) - \ell| = |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \ell| \leq g(\rho)$$

con $g(\rho)$ infinitesima per $\rho \to 0$ allora possiamo concludere che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$.

Esercizio 1 (*). Stabilire se esistono i seguenti limiti ed in caso affermativo calcolarli:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

Suggerimento per il secondo limite: considerare anche il limite lungo le parabole $x = \alpha y^2$.

Esercizio 2 (*). Verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{5/3}y^3}{(x^2+y^2)^2} = 0\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(xy)\left(\frac{x^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0$$

Esercizio 3. Studiare continuità, derivabilità parziale e differenziabilità in $(0,0)$ per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uguale a

$$\frac{x}{\log(x^2+y^2)} \quad \text{per } (x,y) \neq (0,0)$$

ed uguale a 0 in $(x, y) = (0, 0)$.

Esercizio 4. Sia $\underline{\lambda}$ una direzione in $\mathbb{R}^2$: $\|\underline{\lambda}\| = 1$. Possiamo scrivere $\underline{\lambda} = (\cos\phi, \sin\phi)$ per un opportuno ϕ. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\frac{x\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^4)} \quad \text{per} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

ed uguale a 0 in $(x, y) = (0, 0)$.
Calcolare la derivata direzionale lungo $(\cos(\phi), \sin(\phi))$ in $(0, 0)$ utilizzando la definizione.
Suggerimento: il limite che definisce la derivata direzionale è un limite di una variabile; applicare de L'Hopital.
Calcolarla poi utilizzando la formula per la derivata direzionale (formula (15.8) nel libro di testo). Confrontare le due formule e dedurne che la funzione NON è differenziabile in $(0, 0)$.

Esercizio 5. Per la seguente funzione determinare l'insieme di definizione D e studiare la limitatezza e la continuità di f in D. Studiare la derivabilità parziale e la differenziabilità di f nell'insieme aperto A costituito dai punti interni di D

$$f(x, y) = e^{(x+y)}\sqrt{xy}$$

Facoltativo: studiare la derivabilità parziale di f in D.

Esercizio 6 (*).

- Rappresentare nel piano il dominio della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{(x - y)(y - x^2)} + \log(-x^2 - y^2 + \frac{1}{4}).$$

- Rappresentare nel piano il dominio della funzione

$$f(x, y) = \log(3 - |x|)\sqrt{x^2 - y^2}.$$

Esercizio 7. Definizione: un punto critico di una funzione è un punto nel quale si annulla il gradiente.
Sappiamo che se (x, y) è un punto di massimo o minimo relativo allora (x, y) è un punto critico.

- Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2} - 3x + y$$

- Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2 - 2xy - 2y + 8y^3$$

Esercizio 8. Consideriamo la funzione $f(x, y) := 2x^2 - 2\sqrt{3}xy$. Verificare che $(0, 0)$ è un punto critico. Utilizzando le vostre nozioni di algebra lineare, stabilite se $(0, 0)$ è un massimo o un minimo relativo oppure un punto di sella.