Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14. Canale 3.
Prof. P. Piazza
Esercizi su autovalori ed autovettori

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intendere la lingua e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto. (Galileo Galilei, *Saggiatore*)

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.1. Determinare gli autovalori di F_A.
1.2. Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.
1.3. Per ogni autospazio determinare una base.
1.4. Verificare che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per F_A. Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?
1.5. Scrivere la matrice associata a F_A nella base di cui in 1.4. (Utilizzate la definizione di matrice associata ad F_A in una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$; vi ricordo che questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $F_A(\underline{v}_j)$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.)
1.6 Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}\, A\, M$ sia diagonale.

Esercizio 2. Rifare l'Esercizio 1 ma per l'operatore $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 3. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ fissata. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione *lineare* che ammette il sottospazio $\mathbb{R}(1,1)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = -2$ e il sottospazio $\mathbb{R}(-1,0)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda_2 = 3$.
(3.1) Spiegare perché F è univocamente determinata dalle condizioni date.
(3.2) Determinare la matrice associata ad F nella base canonica.

Esercizio 4. Sia

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e sia $T := L_A$
Stabilire se T è diagonalizzabile.

Esercizi di ripasso sull'ultima parte del programma.

Esercizio 5. Sia A la matrice 2×2 data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da A.
Determinare la matrice associata all'applicazione lineare L_A con la seguente scelta di basi:
base di partenza $= \{(0,2),(1,1)\}$, base di arrivo $= \{(0,1),(1,2)\}$.

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica fissata e coordinate associate $\underline{x}$. Consideriamo il piano vettoriale W di equazione cartesiana: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Determinare una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ con coordinate associate $\underline{y}$ in modo tale che W abbia equazione $y_3 = 0$ nelle nuove coordinate.

Esercizio 7. Avete visto l'operazione di prodotto vettoriale di due vettori. In questo esercizio dovete utilizzare quello che avete imparato sul prodotto vettoriale ma anche molte delle nozioni viste durante questo corso di algebra lineare. Fissiamo una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ e scegliamo l'orientazione fissata da tale base.
Sia $\underline{u}$ il vettore di coordinate $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$:

$$\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{k}.$$

(7.1) Determinare l'equazione cartesiana del del sottospazio costituito dai vettori di $\mathcal{V}_O$ che sono ortogonali a $\underline{u}$.[1]

Si consideri l'applicazione $T : V \longrightarrow V$ che associa a $\underline{v}$ il vettore $\underline{u} \wedge \underline{v}$, con $\wedge$ uguale al prodotto vettoriale:

$$T\underline{v} = (\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{k}) \wedge \underline{v}.$$

Dalle proprietà del prodotto vettoriale sappiamo che T è lineare.

(7.1bis) Perché possiamo affermare, senza fare i conti, che $\dim \mathrm{Ker} T = 1$ e $\dim \mathrm{Im} T = 2$? Di fatto, senza fare i conti possiamo determinare precisamente chi è il nucleo e chi è l'immagine. Cercate di dare un argomento... (Suggerimento: utilizzare la definizione e le properietà del prodotto vettoriale....)

(7.2) Scrivere la matrice associata a T nella base fissata $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$.

(7.3) Scrivere equazioni cartesiane per il nucleo $\mathrm{Ker}(T)$ e per per l'immagine $\mathrm{Im}T$. Dare una base per questi sottospazi.

(7.4) Determinare l'immagine tramite T della retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Verificare che il piano π di equazione cartesiana $2x + 2y - 3z = 0$ ha immagine tramite T uguale ad un piano e si determini l'equazione cartesiana di tale piano. Verificate poi che il piano σ di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 0$ ha invece immagine tramite T uguale ad una retta. Come si spiega questa differenza?

[1] Brevemente: determinare l'equazione cartesiana del piano vettoriale ortogonale a $\mathbb{R}\underline{u}$.