Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14. Canale 3
Prof. P. Piazza
Soluzione compito a casa del 20/12/13 (diciottesimo compito)

Esercizio 1. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare* $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definita dalla matrice:*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} .$$

1.1. *Determinare gli autovalori di* F_A.

Soluzione 1.1. Abbiamo visto che gli autovalori di F_A sono le radici del polinomio caratteristico $P_{F_A}(\lambda)$. La matrice associata a F_A nella base canonica è proprio A e quindi $P_{F_A}(\lambda) = P_A(\lambda)$ con

$$P_A(\lambda) = det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} .$$

Calcolando il determinante otteniamo: $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda)$. Ne segue che F_A ha autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2\,, \lambda_3 = 4$.

1.2. *Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.*

Soluzione 1.2. Vi ricordo che

$$V_\lambda = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, F_A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} \equiv \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, (A - \lambda \mathrm{I}_3)\underline{x} = \underline{0}\}\,.$$

Quindi $V_0 = \{\underline{x}\,;\, A\underline{x} = \underline{0}\} = \mathrm{Ker}F_A$; questo sottospazio sappiamo già calcolarlo ed otteniamo

$$V_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \}$$

Passiamo a V_2; la matrice $A - 2\mathrm{I}_3$ è data da

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$V_2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\,;\, \begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \}$$

Procedendo analogamente si trova:

$$V_4 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \}$$

1.3. *Per ogni autospazio determinare una base.*

Soluzione 1.3. In questo caso ogni autospazio è una retta (ognuno dei 3 sistemi è un sistema lineare omogeneo di 2 equazioni in 3 incognite e di rango 2). Risolvendo i sistemi si trova

$$V_0 = \mathbb{R}(0,-3,1)\,, \quad V_2 = \mathbb{R}(4,9,3)\,, \quad V_4 = \mathbb{R}(0,1,1)\,.$$

1.4. *Verificare che esiste una base di* $\mathbb{R}^3$ *costituita da autovettori per* F_A. *Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?*

Soluzione 1.4. I vettori generatori dei 3 autospazi sono linearmente indipendenti; si può far uso della Proposizione che afferma che *autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti*; qui gli autovalori sono certamente distinti e possiamo concludere. Quindi *una* base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F_A è

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1)\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3)\,, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1)$$

Questa base **non** è ovviamente unica; possiamo scegliere 3 generatori diversi nelle 3 rette di autovettori V_0, V_2, V_4 e ottenere così una diversa base di autovettori. Ad esempio

$$\underline{w}_1 = (0, 6, -2)\,, \quad \underline{w}_2 = (4\pi, 9\pi, 3\pi)\,, \quad \underline{w}_3 = (0, \sqrt{39}, \sqrt{39})\,.$$

1.5. *Scrivere la matrice associata a F_A nella base di cui in 1.4. (Utilizzate la definizione di matrice associata ad F_A in una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$; vi ricordo che questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $F_A(\underline{v}_j)$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.)*

Soluzione 1.5. Come spiegato in dettaglio a lezione la matrice associata ad F_A in una base di autovettori è proprio la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di F_A (nell'ordine dato dall'ordine degli autovettori). In questo caso, per la base

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1) \in V_0\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3) \in V_2\,, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1) \in V_4$$

otteniamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

1.6 *Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}\,A\,M$ sia diagonale.*

Soluzione 1.6. Abbiamo a questo punto due basi di $\mathbb{R}^3$; la base canonica e la base di autovettori

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1)\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3)\,, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1)$$

Sia M la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{v}_j$ nella base canonica:

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Questa è la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base di autovettori.

Sappiamo che la matrice B associata a F_A nella nuova base è data da

$$B = M^{-1}AM$$

D'altra parte abbiamo già calcolato questa matrice utilizzando l'informazione che la base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di autovettori ed abbiamo trovato

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

In definitiva, la matrice M è tale che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

come si voleva.

Esercizio 2. *Rifare l'Esercizio 1 ma per l'operatore* $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definito dalla matrice*

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Soluzione Esercizio 2. Il polinomio caratteristico di F_A è $P_{F_A}(\lambda) \equiv P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$ che ha ovviamente radici $\lambda_1 = 1$ *con molteplicità algebrica 2* e $\lambda_2 = 1$. Gli autospazi sono

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$$

e

$$V_{-1} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \}$$

Quindi

$$V_1 = \mathrm{Span}((1,0,-1),(2,1,0))\,, \quad V_{-1} = \mathbb{R}(1,0,1)\,.$$

Questi 3 vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per F_A. La matrice associata a F_A nella base di autovettori è la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

La matrice M che ha come colonne le coordinate, nella base canonica, degli autovettori, e cioè la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ha la proprietà che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Soluzione esercizio 3. Per definizione

$$F(1,1) = -2(1,1) = (-2,-2)\,, \qquad F(-1,0) = 3(-1,0) = (-3,0)\,.$$

F è allora univocamente determinata dalle condizioni date perché è lineare e perché è nota sui vettori $\underline{v}_1 = (1,1)$ e $\underline{v}_2 = (-1,0)$ che sono una base di $\mathbb{R}^2$. Per definizione risulta

$$F\underline{v}_1 = -2\underline{v}_1 = -2\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2\,, \quad F\underline{v}_2 = 3\underline{v}_2 = 0\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2\,;$$

ne segue che la matrice associata ad F nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è la matrice diagonale

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Soluzione classica, con schemino.
Schematicamente:

$$A \text{ associata a } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}\,.$$

Vogliamo trovare

$$B \text{ associata a } \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}\,.$$

Sia M la matrice che ha come colonne le coordinate della base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$: quindi

$$\left| \begin{array}{cc} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{array} \right| M$$

Sappiamo che

$$B = M^{-1}AM$$

Noi non conosciamo M ma conosciamo M^{-1} perché conosciamo la matrice M' tale che

$$\left| \begin{array}{cc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \end{array} \right| M'\,,$$

(infatti $M' = \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right|$) e sappiamo che $M' = M^{-1}$, da cui

$$M = (M')^{-1} = \left(\left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| \right)^{-1} = \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right|$$

e quindi, in definitiva,

$$B = \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right|$$

e si tratta ora di fare il prodotto.

Soluzione con notazione magica.
Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ la base di autovettori e sia $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ la base canonica. Sappiamo che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = \left| \begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \right|\,,$$

conosciamo

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right|$$

e vogliamo trovare $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F)$. Si ha:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) \cdot (M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}))^{-1}$$

da cui

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F) &= \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \right| \cdot (\left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right|)^{-1} \\ &= \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right| \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 4. Un semplice calcolo mostra che T ammette l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 1 e l'autovalore $\lambda = 1$ con m.a. uguale a 2. Si ha inoltre $V_T(0) = \mathbb{R}(1, -1, -1)$, $V_T(1) = \mathbb{R}(-2, 2, 1)$. Ne segue che T non è diagonalizzabile perché la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ è strettamente minore della sua molteplicità algebrica.

Soluzione esercizio 5. La matrice cercata ha come prima colonna le coordinate di $F_A(0,2)$ nella base $\{(0,1),(1,2)\}$ e come seconda colonna le coordinate di $F_A(1,1)$ nella base $\{(0,1),(1,2)\}$. Si ha

$$F_A(0,2) = A\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix}, \quad F_A(1,1) = A\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

D'altra parte

$$(0,4) = 4(0,1) + 0(1,2), \quad (2,1) = -3(0,1) + 2(1,2)$$

da cui la matrice cercata

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Soluzione alternativa. La matrice A è la matrice associata ad F_A nella base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ (come base di arrivo e come base di partenza). Se B è la matrice cercata abbiamo schematicamante

$$A \text{ associata a } \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$$

$$B \text{ associata a } \{(0,2),(1,1)\}, \quad \{(0,1),(1,2)\}.$$

Sappiamo che

$$B = D^{-1}AC$$

con

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Calcolando l'inversa di D e svolgendo il prodotto righe per colonne ritroviamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Seconda soluzione alternativa. Possiamo anche utilizzare la notazione magica. Sia $\mathcal{P}$ la base di partenza e $\mathcal{A}$ la base di arrivo. L'esercizio ci chiede di scrivere $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{P}}(L_A)$. Sia $\mathcal{C}$ la base canonica. Noi conosciamo $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(L_A)$ (che è proprio A). Per la ormai nota formula

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{P}}(L_A) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(L_A) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}).$$

La matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id})$ la conosciamo, è la matrice che ha come colonne le coordinate della base $\mathcal{A}$ nella base canonica e quindi è $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; stesso ragionamento per la matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id})$ che è quindi $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Dato che $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}) = (M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}))^{-1}$ e dato che $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(L_A) = A$, facendo i conti ritroviamo la soluzione già vista.

Soluzione esercizio 6. Sia $\mathcal{C} := \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ la nuova base. Scegliamo questi vettori in modo tale che $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ siano una base del piano assegnato W e $\underline{w}_3 \notin W$. È ovvio che i vettori $\underline{w}_1$, $\underline{w}_2$ e $\underline{w}_3$ hanno coordinate $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ nel sistema di riferimento da loro stessi definito. Se $\underline{v}$ è un vettore del piano W allora W è combinazione lineare di $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2$ e quindi ha coordinate $\underline{y}$ del tipo $(\alpha, \beta, 0)$. Viceversa se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{y}$ del tipo $(\alpha, \beta, 0)$ allora $\underline{v} \in W$ dato che $\underline{v} = \alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_2$. Ciò dimostra che W ha equazione $y_3 = 0$ nelle coordinate associate a $\mathcal{C}$. Per determinare espicitamente i tre vettori basterà scegliere due vettori non-proporzionali in W, ad esempio $\underline{w}_1 = (1, -1, 0)$ e $\underline{w}_2 = (0, 1, -1)$ ed un terzo vettore non in W, ad esempio $\underline{w}_3 = (1, 1, 1)$.

Soluzione Esercizio 7.
(7.1) Il vettore $\underline{v}$ di coordinate incognite (x, y, z) è ortogonale al vettore $\underline{u}$ sse $< \underline{u}, \underline{v} >= 0$ sse $1/\sqrt{3}\, x + 1/\sqrt{3}\, y + 1/\sqrt{3}\, z = 0$.
Ne segue che l'equazione cartesiana del piano ortogonale a $\underline{u}$ è $x + y + z = 0$.
(7.1bis) Ker$T = \mathbb{R}\underline{u}$ dato che $\underline{v} \wedge \underline{u} = \underline{0}$ se e solo se $\underline{v} = \lambda \underline{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (segue dalla definizione di prodotto vettoriale). Per determinare ImT consideriamo due vettori nel piano vettoriale τ, ortogonale a $\underline{u}$; siano essi $\underline{f}_1$ e $\underline{f}_2$. Scegliamo questi due vettori *ortonormali*. Allora $\{\underline{u}, \underline{f}_1 \underline{f}_2\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ e dalla definizione di prodotto vettoriale segue immediatamente che $T(\underline{f}_1) = \underline{f}_2$ oppure $T(\underline{f}_1) = -\underline{f}_2$; analogamente, $T(\underline{f}_2) = \underline{f}_1$ oppure $T(\underline{f}_2) = -\underline{f}_1$ (quale segno prendere dipendende dall'orientazione della base $\{\underline{u}, \underline{f}_1 \underline{f}_2\}$). Ma allora l'immagine di T contiene sicuramente il piano vettoriale τ e dato che dal teorema della dimensione,

$$\dim \mathrm{Ker}T + \dim \mathrm{Im}T = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

sappiamo che $\dim \mathrm{Im}T = 2$ otteniamo che Im$T = \tau$. Essendo τ il piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $\underline{u}$, un'equazione cartesiana per ImT è stata già determinata: si tratta dell'equazione $x + y + z = 0$. Una base ortonormale di ImT è, ad esempio, $\{(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$. Infine rimangono da determinare equazioni cartesiane per la retta Ker$T$. Dato che si tratta della retta ortogonale al piano ImT, e di questo abbiamo appena trovato una base, otteniamo subito le seguenti equazioni cartesiane per Ker$T$:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Tutto ciò risponde anche a 7.3
(7.2) Basta calcolare l'immagine dei vettori della base; per definizione di matrice associata ad un endomorfismo in una fissata base, le loro coordinate sono le colonne della matrice cercata. Utilizzando la formula per il prodotto vettoriale otteniamo: $T(\underline{i}) = 1/\sqrt{3}\underline{j} - 1/\sqrt{3}\underline{k}$; $T(\underline{j}) = -1/\sqrt{3}\underline{i} + 1/\sqrt{3}\underline{k}$; $T(\underline{k}) = 1/\sqrt{3}\underline{i} - 1/\sqrt{3}\underline{j}$.
Quindi la matrice cercata è:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix}.$$

(7.4) La retta è generata dal vettore $(1, -2, 1)$. Quindi l'immagine di questa retta tramite T è data dal sottospazio generato dal vettore $T(1, -2, 1)$ che è dato dal vettore di coordinate

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{-3}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}.$$

Per trovare l'immagine di π basta selezionare una base di π e trasformarla. L'immagine di π tramite T è generata dal sottospazio generato da questi vettori trasformati. Si trova un piano. Lo stesso procedimento si applica a σ ma l'immagine è una retta. La differenza fra questi due piani è che π ha intersezione banale con Ker$T$ mentre

σ contiene Ker$T$. Questa è la ragione per cui $T(\pi)$ è un piano, mentre $T(\sigma)$ è una retta.