Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14.
Canale 3. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 13/12/13 (diciassettesimo compito)

Esercizio 1. (*Ortogonale di un sottoinsieme.*)
Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale metrico e sia S un sottoinsieme di V (non necessariamente un sottospazio). Sia

$$S^{\perp} := \{\underline{v} \in V \text{ tali che } < \underline{v}, \underline{s} >= 0 \ \forall \underline{s} \in S\}$$

Verificare che S è un sottospazio.

Esercizio 2. Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale metrico $(V, < , >)$. Sia $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$ una qualsiasi base di U. Verificare che

$$U^{\perp} = \{\underline{v} \in V \text{ tali che } < \underline{v}, \underline{u}_j >= 0 \ \forall j = 1, \dots, r\}.$$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^n$ e sia A una matrice simmetrica (quindi $A = A^T$). Verificare che la formula

$$< \underline{x}, \underline{y} >:= \underline{y}^T A \underline{x}$$

definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.
Suggerimento: la simmetria l'abbiamo verificata in classe; utilizza la seguente osservazione: *se* $z \in M_{11}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ *allora* $z = z^T$.
Rifate ora da soli la verifica della simmetria.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico

$$< \underline{x}, \underline{y} >:= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Determinare una base ortonormale del sottospazio U di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare poi equazioni cartesiane per $U^{\perp}$ (potete utilizzare l'esercizio 2).

Esercizio 5. Vi ricordo che se V è uno spazio vettoriale metrico e U è un sottospazio con base ortonormale $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$ allora la proiezione ortogonale su U è l'applicazione lineare $P_U : V \to V$

$$P_U(\underline{v}) =< \underline{v}, \underline{u}_1 > \underline{u}_1 + \cdots + < \underline{v}, \underline{u}_r > \underline{u}_r \,.$$

Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico. È dato il piano σ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1, -1, 0, 0) \qquad \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$$

- Trovare le equazioni cartesiane per $\sigma^{\perp}$.
- Sia P_σ l'operatore di proiezione ortogonale sul piano σ. Determinare la matrice associata a P_σ nella base canonica.

Esercizio 6. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ l'applicazione $< , >: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da

$$< (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) >= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Verificare che quest'applicazione definisce un prodotto scalare definito positivo (per il prodotto scalare: potete procedere direttamente oppure ricondurvi all'esercizio

3).
Stabilire se i quattro vettori

$$\{\underline{w}_1 = (1,0,0,0) \quad \underline{w}_2 = (1,1,0,0) \quad \underline{w}_3 = (0,0,1,0) \quad \underline{w}_4 = (0,0,0,1)\}$$

costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ dotato di questo nuovo prodotto scalare.