

**Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14.**  
**Canale 3. Prof. P. Piazza**  
**Compito a casa del 13/12/13 (diciassettesimo compito)**  
**SOLUZIONI.**

**Soluzione esercizio 1.** Sia  $S$  un sottoinsieme di  $V$  e consideriamo  $S^\perp := \{\underline{v} \in V \text{ tali che } \langle \underline{v}, \underline{s} \rangle = 0 \ \forall \underline{s} \in S\}$ . Se  $\underline{v}, \underline{w} \in S^\perp$  allora per definizione

$$\langle \underline{v}, \underline{s} \rangle = 0, \quad \langle \underline{w}, \underline{s} \rangle = 0, \quad \forall \underline{s} \in S$$

Ma allora per la bilinearità del prodotto scalare abbiamo

$$\langle \underline{v} + \underline{w}, \underline{s} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{s} \rangle + \langle \underline{w}, \underline{s} \rangle = 0 + 0 = 0, \quad \forall \underline{s} \in S$$

Quindi  $\underline{v} + \underline{w} \in S^\perp$  che è allora chiuso rispetto alla somma; analogamente si verifica che è chiuso rispetto alla moltiplicazione scalare. Ne segue che  $S^\perp$  è un sottospazio.

**Soluzione esercizio 2.** È ovvio che

$$U^\perp \subset \{\underline{v} \in V \text{ tali che } \langle \underline{v}, \underline{u}_j \rangle = 0 \ \forall j = 1, \dots, r\}$$

Basta verificare che vale l'inclusione opposta. Sia  $\underline{v} \in \{\underline{v} \in V \text{ tali che } \langle \underline{v}, \underline{u}_j \rangle = 0 \ \forall j = 1, \dots, r\}$  e sia  $\underline{u}$  un qualsiasi vettore di  $U$ . Allora  $\underline{u} = \alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_r \underline{u}_r$  e quindi

$$\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \langle \underline{v}, \alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_r \underline{u}_r \rangle = \alpha_1 \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle + \dots + \alpha_r \langle \underline{v}, \underline{u}_r \rangle = 0$$

Quindi  $\underline{v} \in U^\perp$ .

**Soluzione esercizio 3.** La bilinearità è immediata dalle proprietà del prodotto righe per colonne. Si ha poi:

$$\underline{y}^T A \underline{x} = (\underline{y}^T A \underline{x})^T \quad \text{perché questo è un numero.}$$

A sinistra c'è  $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ ; a destra c'è  $\underline{x}^T A^T (\underline{y}^T)^T$  che è uguale a  $\underline{x}^T A \underline{y}$  che per definizione è uguale a  $\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$  e la simmetria è dimostrata.

**Soluzione esercizio 4.** Una base per il sottospazio  $U$  di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

è ad esempio  $\underline{u}_1 = (1, 0, -1, 0)$ ,  $\underline{u}_2 = (0, 1, 0, -1)$  che è anche ortogonale, come subito si verifica. Basta quindi normalizzare, cioè dividere per le rispettive lunghezze, per ottenere una base ortonormale di  $U$ . Se avessimo fissato una base di  $U$  non-ortogonale, ad esempio  $\underline{v}_1 = (1, 1, -1, -1)$ ,  $\underline{v}_2 = (0, -1, 0, 1)$  avremmo dovuto ortogonizzarla, considerando quindi la coppia  $\underline{v}'_1, \underline{v}'_2$  data da

$$\underline{v}'_1 = \underline{v}_1, \quad \underline{v}'_2 = \underline{v}_2 - \frac{\langle \underline{v}_2, \underline{v}'_1 \rangle}{\langle \underline{v}'_1, \underline{v}'_1 \rangle} \underline{v}'_1$$

che è uguale a

$$\underline{v}'_1 = (1, 1, -1, -1), \quad \underline{v}'_2 = (0, -1, 0, 1) - \frac{(-2)}{4} (1, 1, -1, -1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$\{\underline{v}'_1, \underline{v}'_2\}$  è una base ortogonale; considerando

$$\left\{ \frac{1}{\|\underline{v}'_1\|} \underline{v}'_1, \frac{1}{\|\underline{v}'_2\|} \underline{v}'_2 \right\}$$

si ottiene una base ortonormale. Le equazioni cartesiane per  $U^\perp$  sono date dall'esercizio 2; un vettore  $\underline{x}$  appartiene ad  $U^\perp$  sse è ortogonale sia a  $\underline{u}_1 = (1, 0, -1, 0)$  che a  $\underline{u}_2 = (0, 1, 0, -1)$ , quindi se e solo se

$$\begin{cases} \langle \underline{x}, \underline{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \underline{x}, \underline{u}_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

se e solo se

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e queste sono proprio equazioni cartesiane per  $U^\perp$ .

**Soluzione esercizio 5.** Come per l'esercizio precedente,  $\sigma^\perp$  ha equazioni cartesiane che si ottengono traducendo in coordinate le due relazioni

$$\begin{cases} \langle \underline{x}, \underline{v}_1 \rangle = 0 \\ \langle \underline{x}, \underline{v}_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

Lascio a voi i conti. Sappiamo che

$$\left\{ \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|}, \frac{\underline{v}_2}{\|\underline{v}_2\|} \right\}$$

è una base *ortonormale* di  $\sigma$  Poniamo  $\underline{f}_j = \frac{\underline{v}_j}{\|\underline{v}_j\|}$ . Sappiamo che

$$P_U(\underline{v}) = \langle \underline{v}, \underline{f}_1 \rangle \underline{f}_1 + \langle \underline{v}, \underline{f}_2 \rangle \underline{f}_2$$

Per scrivere la matrice associata a  $P_U$  nella base canonica  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$  dovete calcolare  $P_U(\underline{e}_j)$ ,  $j = 1, \dots, 4$  utilizzando la formula precedente; i vettori ottenuti sono le colonne della matrice cercata. Con un pò di conti si ottiene:

$$\begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

**Soluzione esercizio 6.** L'applicazione  $\langle, \rangle: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

è un prodotto scalare perché si scrive come

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{y}^T A \underline{x}$$

dove i vettori sono vettori colonna ed  $A$  è la matrice simmetrica

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(Il coefficiente al posto di riga  $i$  e colonna  $j$  è il coefficiente di  $x_i y_j$ .) Il prodotto scalare è definito positivo perché

$$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2;$$

è immediato verificare che se  $\underline{x}$  non è il vettore nullo, questa quantità è sempre positiva. I quattro vettori

$$\{\underline{w}_1 = (1, 0, 0, 0) \quad \underline{w}_2 = (1, 1, 0, 0) \quad \underline{w}_3 = (0, 0, 1, 0) \quad \underline{w}_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$

sono ortonormali e costituiscono quindi una base ortonormale di  $\mathbb{R}^4$  dotato di questo prodotto scalare.