

Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 07/12/13 (sedicesimo compito)

Spazio vettoriale \mathcal{V}_O con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z) . Un vettore \underline{v} verrà denotato tramite le sue coordinate.

Esercizio 1. Applicare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla seguente base di \mathcal{V}_O :

$$\underline{w}_1 = (1, 1, 0), \quad \underline{w}_2 = (0, 1, 0), \quad \underline{w}_3 = (0, 0, 2).$$

Esercizio 2. Sia $W = \text{Span}(\underline{w})$ con \underline{w} di coordinate $(1, -1, 1)$ rispetto ad una base ortonormale di \mathcal{V}_O . Determinare le coordinate di un versore di questa retta. Determinare il versore di questa retta che forma un angolo acuto con il vettore \underline{j} della base fissata.

Esercizio 3. Sia W la retta vettoriale di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare i vettori di W che hanno lunghezza uguale a 2.

Esercizio 4. Consideriamo il piano vettoriale σ di equazione cartesiana

$$x + 2y - z = 0$$

(i) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right) \quad \underline{f}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

costituiscono una base *ortonormale* di σ .

(ii) Decomporre il vettore $\underline{u} = (0, 1, 2)$ del piano σ nella somma $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 \in \text{Span}(\underline{f}_1)$ e $\underline{u}_2 \in \text{Span}(\underline{f}_2)$.¹

Esercizio 5. Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta ortogonale al piano generato da $\underline{w}_1 = (1, 1, 0)$ e $\underline{w}_2 = (0, 1, -1)$.

¹*Suggerimento per (ii).* Sappiamo che $\underline{u} \in \sigma$. Quindi esistono coefficienti α e β tali che $\underline{u} = \alpha \underline{f}_1 + \beta \underline{f}_2$ e per definizione sarà $\underline{u}_1 = \alpha \underline{f}_1$, $\underline{u}_2 = \beta \underline{f}_2$. Utilizzare il fatto che $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ è una base ortonormale di σ e le proprietà di linearità del prodotto scalare per dimostrare che $\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = \alpha$ e che $\langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle = \beta$. Questo ragionamento non dovrebbe risultarvi nuovo....