Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 07/12/13 (sedicesimo compito).
SOLUZIONI.

Soluzione esercizio 1. Basta applicare meccanicamente il procedimento: prima troviamo una base ortogonale, poi la normalizziamo moltiplicando ogni vettore per l'inverso della sua lunghezza.
Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\underline{u}_1 = \underline{w}_1 = (1,1,0)$$
$$\underline{u}_2 = \underline{w}_2 - \frac{\langle \underline{w}_2, \underline{u}_1\rangle}{\langle \underline{u}_1, \underline{u}_1\rangle}\underline{u}_1 = (0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

Infine $\underline{u}_3 = \underline{w}_3$ dato che $\langle \underline{w}_3, \underline{u}_1\rangle = 0$ e $\langle \underline{w}_3, \underline{u}_2\rangle = 0$. La base cercata è quindi:

$$\left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,, \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\,, \quad (0,0,1) \right\}$$

Soluzione esercizio 2. Un vettore non nullo della retta W è il vettore $\underline{v} = (1,-1,1)$. Dunque i versori di W sono $\underline{v}_1 = \underline{v}/\|\underline{v}\| = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $\underline{v}_2 = -\underline{v}/\|\underline{v}\| = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Per determinare quale tra $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ formi un angolo acuto con il versore $\underline{j}$, basta ricordarsi che due vettori formano un anglo acuto se e solo se il coseno dell'angolo che formano è positivo, ovvero se e solo se il loro prodotto scalare è positivo. Si calcola immediatamente $\langle \underline{v}_1, \underline{j}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\langle \underline{v}_2, \underline{j}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dunque il versore richiesto è $\underline{v}_2$.

Soluzione esercizio 3. Una base di W è data dal vettore $(1,1,0)$. Ne segue che i vettori di W sono tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^3$ della forma $(\lambda, \lambda, 0)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quelli di lunghezza 2 sono quelli per cui $\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2} = 2$, ovvero quelli con $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Esplicitamente, si tratta dei due vettori $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

Soluzione esercizio 4. Si ha $\langle \underline{f}_1, \underline{f}_2\rangle = \frac{2}{\sqrt{150}} - \frac{2}{\sqrt{150}} = 0$ e quindi i due vettori sono ortogonali. Inoltre,

$$||\underline{f}_1|| = 1\,, \quad ||\underline{f}_2|| = 1$$

e quindi i due vettori sono ortonormali. Dato che le coordinate di $\underline{f}_1$ e quelle di $\underline{f}_2$ soddisfano l'equazione del piano, concludiamo che $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ costituiscono una base ortonormale del piano σ.
Per (ii): il suggerimento ci dice che

$$\underline{u}_1 = \langle \underline{u}, \underline{f}_1\rangle \underline{f}_1\,, \quad \underline{u}_2 = \langle \underline{u}, \underline{f}_2\rangle \underline{f}_2$$

e si tratta solo di fare i due prodotti scalari. Facendo i conti otteniamo $\langle \underline{u}, \underline{f}_1\rangle = -1/\sqrt{5}$ e $\langle \underline{u}, \underline{f}_2\rangle = 12/\sqrt{30}$; quindi $\underline{u}_1 = (-2,1,0)$, $\underline{u}_2 = (2/5, 4/5, 2)$.
Per giustificare il ragionamento del suggerimento basta ragionare come segue: sappiamo che $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 = \alpha \underline{f}_1$, $\underline{u}_2 = \beta \underline{f}_2$. Dato che $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ è una base ortonormale di σ si ha:

$$\langle \underline{u}, \underline{f}_1\rangle = \langle \alpha\underline{f}_1 + \beta\underline{f}_2, \underline{f}_1\rangle = \alpha\langle \underline{f}_1, \underline{f}_1\rangle + \beta\langle \underline{f}_2, \underline{f}_1\rangle \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha.$$

Quindi $\langle \underline{u}, \underline{f}_1\rangle = \alpha$; analogamente $\langle \underline{u}, \underline{f}_2\rangle = \beta$, come volevasi.

Soluzione esercizio 5.
Basta scrivere l'equazione cartesiana $ax + by + cz = 0$ del piano $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ e prendere la retta generata dal vettore che ha coordinate (a, b, c). L'equazione cartesiana del piano è $x - y - z = 0$. La retta è data quindi da $\mathrm{Span}(1, -1, -1)$. Le equazioni parametriche sono immediate e quelle cartesiane si ottengono come al solito (Gauss + compatibilità). Notiamo che se fossimo interessati esclusivamente alle equazioni cartesiane della retta ortogonale al piano $W := \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ allora potremmo anche ragionare come segue:

$$(x, y, z) \perp W \Leftrightarrow (x, y, z) \perp \underline{v},\ \forall \underline{v} \in W \Leftrightarrow (x, y, z) \perp (1, 1, 0) \textbf{ e } (x, y, z) \perp (0, 1, 1)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la bilinearità del prodotto scalare per dimostrare l'implicazione $\Leftarrow$.
Ma

$$(x, y, z) \perp (1, 1, 0) \textbf{ e } (x, y, z) \perp (0, 1, 1) \Leftrightarrow$$
$$< (x, y, z), (1, 1, 0) >= 0 \textbf{ e } < (x, y, z), (0, 1, -1) >= 0$$

e svolgendo i due prodotti scalari otteniamo finalmente le due equazioni cartesiane per la retta ortogonale:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Quello appena spiegato è forse il metodo più rapido per scivere le equazioni cartesiane di una retta ortogonale ad un piano dato tramite una sua base; è anche spiegato nelle *Note di Geometria Euclidea.*

Un'ultima osservazione: se un piano, come nel caso di quest'esercizio, è dato tramite una sua base $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$, allora il metodo piú rapido per scrivere le coordinate di un vettore ortogonale a tale piano è quello di scrivere le coordinate del vettore $\underline{w}_1 \wedge \underline{w}_2$. Infatti, per definizione, $\underline{w}_1 \wedge \underline{w}_2$ è un vettore ortogonale al piano $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$. Le coordinate di $\underline{w}_1 \wedge \underline{w}_2$ sono date dalla formula spiegata nelle *Note di Geometria Euclidea* (alla fine).