Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 29/11/13(quindicesimo compito)

Esercizio 1. Facendo uso della formula (8.4) page 153, dare una soluzione alternativa degli esercizi 2 e 3 del tredicesimo compito (compito del 23/11/13).

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia π un sottospazio vettoriale di dimensione 2, cioè un piano, ed r una retta non contenuta in π. Sappiamo che $V = r \oplus \pi$; quindi ogni vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ si scrive in maniera unica come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in r$ e $\underline{w}_2 \in \pi$. Nel quattordicesimo compito a casa (Esercizio 1) abbiamo definito un'applicazione *lineare* $P_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associando a $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ il vettore $\underline{w}_1 \in \mathbb{R}^3$: quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione. Essa è, per definizione, la proiezione su r parallelamente a π. La legge $\underline{w} \longrightarrow \underline{w}_2$ definisce la proiezione su π parallelamente a r; questa è anche un'applicazione lineare ed è denotata tramite P_2. Quindi $P_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$.
Abbiamo altre due applicazione *lineari* definite dalla decomposizione $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus r$. La simmetria S_1 rispetto a r parallelamente a π e la simmetria S_2 rispetto a π parallelamente a r:

$$S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \qquad S_2(\underline{w}) = \underline{w}_2 - \underline{w}_1 .$$

1. (Questo quesito già compariva nel quattordicesimo compito; se non lo avete fatto, fatelo ora.)
Disegnate π, r ed un generico $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ con $\underline{w} \notin r$, $\underline{w} \notin \pi$; sul disegno indicate $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.
2.. (Questo quesito già compariva nel quattordicesimo compito; se non lo avete fatto, fatelo ora.)
Determinare l'immagine ed il nucleo di P_1 e P_2. Spiegare perché S_1 e S_2 sono biunivoche.
3. Verificare che sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1 \,; \quad (P_2)^2 = P_2 \,; \quad P_2 = \mathrm{Id} - P_1 \,; \quad S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2 \,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id}$$
$$S_1^2 = \mathrm{Id} \,, \quad S_2^2 = \mathrm{Id} \,.$$

È bene ricordare che se $T : V \to V$ è un'applicazione lineare allora T^2 è per definizione l'applicazione $T \circ T$ (che sappiamo essere ancora lineare) . In queste formule Id è l'applicazione identica, che manda $\underline{v}$ in $\underline{v}$.
Suggerimento: dire che due applicazioni $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sono uguali vuol dire che $S(\underline{w}) = T(\underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in \mathbb{R}^3$. Nel primo caso si tratta di dimostare che $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha $P_1(P_1(\underline{v})) = P_1(\underline{v})$...
Di nuovo, utilizzate una figura per aiutarvi.
4. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla proiezione P_2 sul piano π di equazione $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ parallelamente alla retta r generata dal vettore $(1, 2, 1)$ (scriveremo brevemente $\mathbb{R}(1, 2, 1)$ per questa retta).
Suggerimento: c'è una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui la matrice associata a P_2 è estremamente facile a scriversi. Qual è questa base ?[1] Una volta scritta la

[1] Per rispondere a questa domanda interrogatevi su come agisce P_2 sui vettori del piano π e sui vettori della retta r.

matrice associata a P_2 in questta "base speciale", l'esercizio può essere completato utilizzando la formula (8.5).

5. Scrivere la matrice associata alle seguente applicazioni nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ (quindi: base partenza = base arrivo = base canonica):

- la proiezione P_1 sulla retta r parallelamente al piano π;
- la simmetria S_1 rispetto a r parallelamente a π;
- la simmetria S_2 rispetto a π parallelamente a r.

Esercizio 3. Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e determinare per quali valori di k la matrice è invertibile.

Esercizio 4. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ c & d & n & p \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix}.$$

Dimostrare che

$$\det A = \det B = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$