Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 29/11/13 (quindicesimo compito).
SOLUZIONI.

Soluzione esercizio 1.
Nuova soluzione esercizio 2 del 23/11/13). Faremo uso della formula (8.4) del libro. In questo caso $V = W (= \mathbb{R}^3)$. Consideriamo la base

$$\underline{e}'_1 = (1,1,0) \quad \underline{e}'_2 = (0,1,1)\,, \quad \underline{e}'_3 = (0,0,1)$$

I dati del problema forniscono immediatamente la matrice A associata ad F rispetto alla seguente scelta di basi:

$$\text{base di partenza} = \{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}\,, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica}\,.$$

Vi ricordo infatti che tale matrice è, per definizione, la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate, nella base di arrivo, del vettore $F(\underline{e}'_j)$. Ma questa è proprio l'informazione che ci viene data dal testo del problema. Quindi

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Vogliamo ora determinare la matrice A' associata ad F rispetto alla scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \text{base canonica}\,, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica}\,.$$

Lo schema è il seguente. Sia I_3 la matrice identità 3×3.

$$A \;\text{ associata a }\; \{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}\,, \qquad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}.$$

$$\mathbf{A}' \;\text{ associata a }\; \{\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3\}\,, \qquad \{\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3\}.$$

$$\begin{vmatrix} \underline{\mathbf{e}}_1 & \underline{\mathbf{e}}_2 & \underline{\mathbf{e}}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}'_1 & \underline{e}'_2 & \underline{e}'_3 \end{vmatrix} B, \qquad \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{e}}_1 & \underline{\mathbf{e}}_2 & \underline{\mathbf{e}}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \end{vmatrix} I_3$$

$$\mathbf{A}' = I_3^{-1}\, A\, B = A\, B$$

La matrice B è al momento sconosciuta; d'altra parte essa è l'inversa della matrice B' che ha come colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$ nella base $\{\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3\}$ (che è la base canonica). Quest'ultima matrice è invece nota perché è data nel testo del problema

$$B' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Quindi

$$B = (B')^{-1} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right)^{-1}$$

da cui, calcolando l'inversa,

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Concludendo

$$\mathbf{A}' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nuova soluzione esercizio 3 del 23/11/13. I dati del problema ci danno la matrice A che rappresenta l'applicazione lineare P rispetto alla base canonica come base di partenza e alla base $\mathcal{G}$ come base di arrivo. Abbiamo

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice richiesta dall'esercizio è la matrice A' associata alla scelta $\mathcal{G}$ in partenza e in arrivo. Siete ormai esperti e scrivo direttamente la conseguenza della magica formula (8.4) (fatevi voi lo schemino per convincervi che non ho sbagliato)

$$A' = I_3^{-1} \cdot A \cdot B$$

La matrice B è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori della base $\mathcal{G}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dai dati dell'esercizio abbiamo pertanto

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Otteniamo così

$$A' = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 2. Direttamente dalla definizione, e con un semplice ragionamento, segue che l'immagine di P_1 è la retta r, mentre il nucleo di P_1 è il piano π. Analogamente, P_2 ha immagine uguale al piano e nucleo uguale alla retta. S_1 e S_2 sono biettive perché iniettive da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$; infatti è facile verificare che il nucleo di S_1 e S_2 è banale: $S_1(\underline{v}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_2 \Rightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_2 = \underline{0}$ perché $\underline{v}_1 \in r$, $\underline{v}_2 \in \pi$ e $r \cap \pi = \underline{0}$. Sicuramente $P_1(P_1\underline{v}) = P_1(\underline{v})$ $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ perchè $P_1(\underline{v})$ è un elemento della retta e quindi la sua decomposizione rispetto alla somma diretta è $P_1\underline{v} = P_1\underline{v} + \underline{0}$, il che implica che $P_1(P_1\underline{v}) = P_1(\underline{v})$. Analogamente $P_2(P_2\underline{v}) = P_2(\underline{v})$ $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3$. Riassumendo: $P_i^2 = P_i$ per $i = 1, 2$. Infine, $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ abbiamo $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1 - \underline{v}_2 - \underline{v}_2 = \underline{v} - 2\underline{v}_2$; a destra c'è $S_1\underline{v}$; a sinistra c' è $\mathrm{Id}(\underline{v}) - 2P_2(\underline{v})$. Dato che questo è vero per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ concludiamo che $S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2$. Similmente si dimostra l'altra relazione.
Dovrebbe anche essere chiaro, per lo meno dalle figure che avete fatto, che $S_1^2 := S_1 \circ S_1 = \mathrm{Id}$ e analogamente $S_2 \circ S_2 = \mathrm{Id}$ [1]: per dimostrare rigorosamente che $S_1^2 = \mathrm{Id}$ basta dimostrare che $S_1(S_1(\underline{v})) = \mathrm{Id}(\underline{v}) \equiv \underline{v}$ per ogni $\underline{v}$; ma abbiamo

$$S_1(S_1(\underline{v})) = S_1(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = S_1(\underline{v}_1) - S_1(\underline{v}_2)$$

[1] ciò implica che S_1 e S_2 sono invertibili e quindi bigettive, con inversa uguale a S_1 e S_2 rispettivamente

Ora, S_1 agisce come l'identità sui vettori della retta e come $-\mathrm{Id}$ sui vettori del piano (direttamente dalla definizione); quindi $S_1(\underline{v}_1) = \underline{v}_1$ e $S_1(\underline{v}_2) = -\underline{v}_2$. In definitiva:

$$S_1(S_1(\underline{v})) = \underline{v}_1 - (-\underline{v}_2) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v} = \mathrm{Id}(\underline{v})$$

e abbiamo finito.
Per trovare la matrice associata a P_2 nella base canonica ragioniamo come segue. Consideriamo una base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ fatta nel seguente modo: $\underline{g}_1$ e $\underline{g}_2$ sono vettori di π, mentre $\underline{g}_3$ è un vettore di r. Allora, per definizione di proiezione su un piano di $\mathbb{R}^3$ parallelamente ad una retta data, si ha

$$P_2(\underline{g}_1) = \underline{g}_1;\ P_2(\underline{g}_2) = \underline{g}_2;\ P_2(\underline{g}_3) = \underline{0}.$$

Riscriviamo queste relazioni come segue:
$P_2(\underline{g}_1) = 1\underline{g}_1 + 0\underline{g}_2 + 0\underline{g}_3$
$P_2(\underline{g}_2) = 0\underline{g}_1 + 1\underline{g}_2 + 0\underline{g}_3$
$P_2(\underline{g}_3) = 0\underline{g}_1 + 0\underline{g}_2 + 0\underline{g}_3$.

Ne segue che la matrice che rappresenta la proiezione P_2 rispetto alla base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ scelta sia come base di partenza che di arrivo è la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La matrice A' che rappresenta la proiezione P_2 nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ si ottiene a partire da A con un cambio di base, utilizzando la formula (8.4). Quindi:

$$A' = M^{-1} \cdot A \cdot M$$

dove M è la matrice del cambio di base, dalla base $\mathcal{G}$ alla base canonica, e dove M^{-1} è la matrice del cambio di base, dalla base canonica alla base $\mathcal{G}$. M^{-1} è quindi la matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ rispetto alla base canonica si $\mathbb{R}^3$. Per determinare esplicitamente M^{-1} dobbiamo pertanto determinare esplicitamente una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$. Come abbiamo detto, i vettori $\underline{g}_1$ e $\underline{g}_2$ devono formare una base di π. Li determiniamo pertanto risolvendo l'equazione che definisce π: da $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ricaviamo $x_1 = x_2 + x_3$, ovvero

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2\}$ per π è pertanto

$$\underline{g}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \qquad \underline{g}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Infine, $\underline{g}_3$ deve essere un vettore (non nullo) appartenente alla retta r. È chiaro che una possibile scelta di $\underline{g}_3$ è

$$\underline{g}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Con queste scelte di $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$ troviamo

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

ovvero, nelle coordinate x_1, x_2, x_3 di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica, la proiezione P_2 è l'applicazione lineare

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_1 - x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{vmatrix}$$

Osserviamo che abbiamo allora

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} ; \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} ; \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} ,$$

come dev'essere.
Infine, per scrivere la matrice associata nella base canonica alle applicazioni P_1, S_1 e S_2 basterà utilizzare l'espressione di queste applicazioni in termini di P_2 ed il fatto che l'applicazione

$$\Xi_{\mathcal{F}} : \mathcal{L}(V, V) \to M_{nn}(\mathbb{R})$$

che associa ad un endomorfismo la sua matrice in una fissata base $\mathcal{F}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali (Proposizione 8.1 del libro). Quindi, ad esempio, nel nostro caso, se $\mathcal{F}$ è la base canonica si ha:

$$\Xi_{\mathcal{F}}(S_1) = \Xi_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id} - 2P_2) = \Xi_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}) - 2\Xi_{\mathcal{F}}(P_2) = I_3 - 2 \begin{vmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

con I_3 la matrice identità 3×3. Basta ora fare la differenza per ottenere la matrice associata a S_1 nella base canonica. Analogamente si procede per le altre applicazioni.

Soluzione esercizio 3. Sviluppando mediante la formula di Laplace rispetto alla prima riga troviamo

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Sviluppiamo adesso rispetto alla terza riga:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \det \begin{vmatrix} k & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \det \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(k-1) - (-1-k) = 3k - 1.$$

Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero, pertanto la matrice data è invertibile se e solo se $k \neq 1/3$.

Soluzione esercizio 4. Calcoliamo il detrminante di A. Sviluppiamo il determinante di A rispetto alla prima riga mediante la formula di Laplace:

$$\det A = \det \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix} = a \det \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ f & g & h \\ y & z & w \end{vmatrix} - b \det \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ e & g & h \\ x & z & w \end{vmatrix}$$

Sviluppando ancora mediante la regola di Laplace rispetto alla prima riga troviamo

$$\det A = ad \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} - bc \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

$$= (ad - bc) \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Il determinante di B si calcola in modo perfettamente analogo, sviluppando rispetto alla prima colonna. In alternativa, il determinante di B è uguale al determinante della sua trasposta, che ha la stessa struttura di A.