Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 25/11/13 (quattordicesimo compito)

Premesse all'esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due sottospazi. Supponiamo che $V = U + W$. Scriviamo che $V = U \oplus W$ se, in aggiunta, $U \cap W = \underline{0}$.
Abbiamo visto a lezione che $V = U \oplus W$ se e solo se ogni vettore di V si scrive in maniera *unica* come somma di un vettore in U e di un vettore in W (in formule: se $\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{w}_1$ e $\underline{v} = \underline{u}_2 + \underline{w}_2$ con $\underline{u}_i \in U$ e $\underline{w}_i \in W$ allora $\underline{u}_1 = \underline{u}_2$ e $\underline{w}_1 = \underline{w}_2$).
Esercizio 1 . Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia π un sottospazio vettoriale di dimensione 2, cioè un piano, ed r una retta vettoriale non contenuta in π. Sappiamo che $V = r \oplus \pi$; quindi ogni vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ si scrive in maniera unica come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in r$ e $\underline{w}_2 \in \pi$.
Definiamo un'applicazione $P_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associando a $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ il vettore $\underline{w}_1 \in \mathbb{R}^3$: quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione.
1.1 Verificare che l'applicazione P_1 è *lineare*. (Suggerimento: usare l'unicità di cui nelle premesse.) Essa è, per definizione, la proiezione su r parallelamente a π.

La legge $\underline{w} \longrightarrow \underline{w}_2$ definisce la proiezione su π parallelamente a r; questa è anche un'applicazione lineare ed è denotata tramite P_2. Quindi $P_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$.
Abbiamo altre due applicazione *lineari* definite dalla decomposizione $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus r$. La simmetria S_1 rispetto a r parallelamente a π e la simmetria S_2 rispetto a π parallelamente a r:

$$S_1(\underline{w}) := \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \qquad S_2(\underline{w}) := \underline{w}_2 - \underline{w}_1.$$

1.2 Disegnate π, r ed un generico $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ con $\underline{w} \notin r$, $\underline{w} \notin \pi$; sul disegno indicate $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.
1.3. Determinare l'immagine ed il nucleo di P_1 e P_2. Spiegare perché S_1 e S_2 sono bigezioni.
Esercizio 2 . Generalizzate l'esercizio precedente (con l'esclusione del disegno) ad un qualsiasi spazio vettoriale V che sia somma diretta di due suoi sottospazi, $V = U \oplus W$, definendo la proiezione su U parallelamente a W, la proiezione su W parallelamente a U, la simmetria rispetto a U parallelamente a W e la simmetria rispetto a W parallelamente a U. Determinare nucleo ed immagine delle proiezioni. Spiegare perché le simmetrie sono bigezioni.
Esercizio 3 . Sia $V = \mathbb{R}^2$. Verificare che i seguenti 2 vettori sono una base di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{v}_1 = (1,2)\,, \quad \underline{v}_2 = (-1,1).$$

Verificare che i seguenti 2 vettori sono un'altra base di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{u}_1 = (1,1)\,, \quad \underline{u}_2 = (1,0)$$

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \quad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2$$

Utilizzando opportune matrici di cambiamento di base risolvere i seguenti esercizi:
3.1 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza $= \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ $\qquad$ base arrivo $= \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

3.2 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza $= \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo $= \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

3.3 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza $= \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo $= \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

3.4 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza $= \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo $= \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$