Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 25/11/13 (quattordicesimo compito).
SOLUZIONI.

Soluzione esercizio 1. Per la linearità delle proiezioni procediamo come segue. Sia $\underline{v} + \underline{v}' \in \mathbb{R}^3$. Allora, rispetto alla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = r \oplus \pi$ sarà $\underline{v} + \underline{v}' = (\underline{v} + \underline{v}')_1 + (\underline{v} + \underline{v}')_2$. D'altra parte possiamo decomporre $\underline{v}$ e $\underline{v}'$ singolarmente e si avrà $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ e $\underline{v}' = \underline{v}'_1 + \underline{v}'_2$. Sommando queste due espressioni e applicando le proprieità della somma di vettori otteniamo $\underline{v} + \underline{v}' = (\underline{v}_1 + \underline{v}'_1) + (\underline{v}_2 + \underline{v}'_2)$ e per l'unicità si ha

$$(\underline{v} + \underline{v}')_1 = \underline{v}_1 + \underline{v}'_1\,, \quad (\underline{v} + \underline{v}')_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}'_2$$

che si legge anche

$$P_1(\underline{v} + \underline{v}') = P_1(\underline{v}) + P_1(\underline{v}')\,, \quad P_2(\underline{v} + \underline{v}') = P_2(\underline{v}) + P_2(\underline{v}')$$

da cui l'additività. La dimostrazione che $P_j(\lambda \underline{v}) = \lambda P_j(\underline{v})$ è simile.

Il disegno lo abbiamo visto in classe.

Per la terza parte dell'esercizio: è chiaro che l'immagine di P_1 è la retta r; inoltre il nucleo di P_1 sicuramente contiene il piano π (applicate la definizione: se $\underline{v} \in \pi$ allora la sua decomposizione rispetto a $r \oplus \pi$ è $\underline{0} + \underline{v}$ e quindi $P_1\underline{v} = \underline{0}$). Dato che il nucleo ha dimensione $3 - 1 = 2$ ne segue che il nucleo è proprio π. Allo stesso modo si vede che P_2 ha nucleo r e immagine π. Dimostriamo che l'unico vettore nel nucleo di S_1 è il vettore nullo: sia $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$; $S_1\underline{v}$ è uguale per definizione a $\underline{v}_1 - \underline{v}_2$; quindi $S_1\underline{v} = \underline{0}$ se e solo se $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}$ se e solo se $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$ il che implica che $\underline{v}_1 = \underline{0} = \underline{v}_2$ (per definizione di somma diretta). Quindi $\operatorname{Ker} S_1 = \{\underline{0}\}$ e S_1 è iniettiva. Dato che andiamo da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ è anche suriettiva e quindi bigettiva. Allo stesso modo si procede per S_2.

Soluzione esercizio 2. Del tutto analoga all'esercizio 1. Le definizioni sono simili: se, con ovvia notazione, $\underline{v} = \underline{v}_U + \underline{v}_W$, allora per la proiezione su U parallelamente a W, denotata P_1, si ha

$$P_1(\underline{v}) = \underline{v}_U$$

Si ha poi: $P_2(\underline{v}) = \underline{v}_W$, $S_1(\underline{v}) = \underline{v}_U - \underline{v}_W$ e $S_2(\underline{v}) = -\underline{v}_U + \underline{v}_W$. La linearità si dimostra allo stesso modo. La proiezione su U parallelamente a W ha immagine U e nucleo W. Analogo risultato vale per l'altra proiezione. Il fatto che le simmetrie siano bigezioni si dimostra esattamente come nel caso 3-dimensionale.

Soluzione esercizio 3. Il testo dell'esercizio fornisce l'informazione

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \qquad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2\,;$$

questo vuol dire che il testo dell'esercizio fornisce la matrice richiesta in **3.1**, e cioè la matrice, chiamiamola A_1, associata a T con la scelta di basi:

$$\text{base partenza} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}\,, \quad \text{base arrivo} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}.$$

Vi ricordo infatti che la matrice A_1 è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $T\underline{v}_j$ rispetto alla base $\underline{u}_1, \underline{u}_2$. Quindi

$$A_1 = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{array} \right|.$$

Si tratta ora di utilizzare la formula (8.4) nel libro di testo, che richiamiamo qui sotto, per trovare le matrici richieste in **3.2, 3.3, 3.4.**

Richiami di teoria. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_n\}$ una base di V e sia $\mathcal{C} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ una base di W. Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare.
Sia A la matrice associata a T rispetto alla scelta

$$\mathcal{B} = \text{base di partenza}\,, \quad \mathcal{C} = \text{base di arrivo}\,.$$

Siano $\mathcal{B}' = \{\underline{v}'_1, \dots \underline{v}'_n\}$ un'altra base di V e $\mathcal{C}' = \{\underline{w}'_1, \dots, \underline{w}'_m\}$ un'altra base di W.
Sia A' la matrice associata a T rispetto alla scelta

$$\mathcal{B}' = \text{base di partenza}\,, \quad \mathcal{C}' = \text{base di arrivo}\,.$$

Sia D la matrice del cambiamento di base, da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$: D è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{w}'_j$ nella base $\mathcal{C}$:

$$\underline{w}'_j = \underline{w}_1 d_{1j} + \underline{w}_2 d_{2j} + \cdots + \underline{w}_m d_{mj}\,.$$

Utilizzando la definizione di prodotto righe per colonne e ragionando qualche secondo capiamo che possiamo scrivere brevemente

$$\left| \begin{array}{ccc} \underline{w}'_1 & \cdots & \underline{w}'_m \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} \underline{w}_1 & \cdots & \underline{w}_m \end{array} \right| D.$$

Sia B la matrice del cambiamento di base, da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$: scriviamo brevemente $\left| \begin{array}{ccc} \underline{v}'_1 & \cdots & \underline{v}'_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} \underline{v}_1 & \cdots & \underline{v}_n \end{array} \right| B.$
Allora:

$$A' = D^{-1} A B\,. \tag{1}$$

È bene riassumere schematicamente la situazione.

$$A \text{ associata alla scelta } \mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \quad \mathcal{C} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{u}_m\}$$
$$\mathbf{A}' \text{ associata alla scelta } \mathcal{B}' = \{\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_n\} \quad \mathcal{C}' = \{\underline{w}'_1, \dots, \underline{u}'_m\}$$
$$\left| \begin{array}{ccc} \underline{v}'_1 & \cdots & \underline{v}'_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} \underline{v}_1 & \cdots & \underline{v}_n \end{array} \right| B\,, \quad \left| \begin{array}{ccc} \underline{w}'_1 & \cdots & \underline{w}'_m \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} \underline{w}_1 & \cdots & \underline{w}_m \end{array} \right| D$$
$$A' = D^{-1} A B$$

Fine richiami teoria.

Continuiamo con la soluzione dell'esercizio. Cominciamo con **3.2** e sia A_2 la matrice cercata. Sia $I = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right|$ la matrice identità 2×2. È ovvio che I è invertibile ed uguale alla sua inversa (useremo questa informazione più tardi). La formula (8.4) del libro di Abate ci dice che

$$A_2 = D^{-1} A_1 I = D^{-1} A_1$$

dove D è la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{v}_1$ rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{v}_2$ rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$.
È bene riassumere schematicamente la situazione.
Schematicamente abbiamo (attenzione, le lettere in grassetto e quelle in corsivo vengono stampate in maniera leggermente diversa; tuttavia $\{\underline{\mathbf{v_1}}, \underline{\mathbf{v_2}}\}$ e $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ sono la stessa base, e analogamente $\{\underline{\mathbf{u_1}}, \underline{\mathbf{u_2}}\}$ e $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ sono la stessa base):

$$A_1 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$$
$$\mathbf{A_2} \text{ associata alla scelta } \{\underline{\mathbf{v_1}}, \underline{\mathbf{v_2}}\} \quad \{\underline{\mathbf{v_1}}, \underline{\mathbf{v_2}}\}$$

$$\left| \ \underline{\mathbf{v_1}} \quad \underline{\mathbf{v_2}} \ \right| = \left| \ \underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \ \right| I\,, \qquad \left| \ \underline{\mathbf{v_1}} \quad \underline{\mathbf{v_2}} \ \right| = \left| \ \underline{u}_1 \quad \underline{u}_2 \ \right| D$$
$$\mathbf{A_2} = D^{-1} A_1 I$$

Per determinare D^{-1} possiamo determinare prima D e poi calcolare la sua inversa. Notiamo tuttavia che D non è nota, perché non conosciamo le coordinate di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ [1]. Tanto vale calcolare D^{-1} direttamente: vi ricordo che D^{-1} è la matrice tale che

$$\left| \ \underline{u}_1 \quad \underline{u}_2 \ \right| = \left| \ \underline{\mathbf{v_1}} \quad \underline{\mathbf{v_2}} \ \right| D^{-1}$$

e cioè la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{u}_1 = (1,1)$ rispetto alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{u}_2 = (1,0)$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Impostando il sistemino $(1,1) = \alpha(1,2) + \beta(-1,1)$ e risolvendo scopriamo che

$$(1,1) = \frac{2}{3}(1,2) + (-\frac{1}{3})(-1,1)$$

Analogamente

$$(1,0) = \frac{1}{3}(1,2) + (-\frac{2}{3})(-1,1)$$

Ne segue che

$$D^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

e quindi in definitiva

$$A_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 5/3 \\ 1/3 & -7/3 \end{vmatrix}$$

Passiamo a **3.3.** Sia A_3 la matrice cercata. È chiaro dalla soluzione di **3.2** che conviene determinare A_3 sulla base di A_2 perché in tale maniera una delle matrici che compaiono nella formula (8.4) del libro di testo sarà l'identità. Ciò sarà chiaro dallo schemino che segue. Schematicamente abbiamo infatti

$$A_2 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$$
$$\mathbf{A_3} \text{ associata alla scelta } \{\underline{\mathbf{u_1}}, \underline{\mathbf{u_2}}\} \quad \{\underline{\mathbf{v_1}}, \underline{\mathbf{v_2}}\}$$
$$\left| \ \underline{\mathbf{u_1}} \quad \underline{\mathbf{u_2}} \ \right| = \left| \ \underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \ \right| D^{-1}\,, \qquad \left| \ \underline{\mathbf{v_1}} \quad \underline{\mathbf{v_2}} \ \right| = \left| \ \underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \ \right| I$$
$$\mathbf{A_3} = I^{-1} A_2 D^{-1} = A_2 D^{-1}$$

A questo punto basta fare il prodotto.

Consideriamo **3.4.** e sia A_4 la matrice cercata. In questo caso conviene determinarla utilizzando A_1 oppure A_3. Facciamolo con A_1. Schematicamente abbiamo allora

$$A_1 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$$
$$\mathbf{A_4} \text{ associata alla scelta } \{\underline{\mathbf{u_1}}, \underline{\mathbf{u_2}}\} \quad \{\underline{\mathbf{u_1}}, \underline{\mathbf{u_2}}\}$$
$$\left| \ \underline{\mathbf{u_1}} \quad \underline{\mathbf{u_2}} \ \right| = \left| \ \underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \ \right| D^{-1}\,, \qquad \left| \ \underline{\mathbf{u_1}} \quad \underline{\mathbf{u_2}} \ \right| = \left| \ \underline{u}_1 \quad \underline{u}_2 \ \right| I$$
$$\mathbf{A_4} = I^{-1} A_1 D^{-1} = A_1 D^{-1}$$

e di nuovo basta ora fare il prodotto.

[1] D è la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{v}_1$ rispetto alla base $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{v}_2$ rispetto alla base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$