Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14.
Canale 3. Prof. P. Piazza.
Compito a casa del 23/11/13 (tredicesimo compito)

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\{\underline{e}_1 := (1,0), \underline{e}_2 := (0,1)\}$ fissata; vi faccio notare che le coordinate di $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica sono proprio $\underline{x}$. Consideriamo una seconda base di $\mathbb{R}^2$ data da

$$\underline{v}_1 = (1,1)\,, \quad \underline{v}_2 = (1,-1)$$

e siano (y_1, y_2) le coordinate associate a questa base.
Determinare le formule di cambiamento di coordinate

$$\underline{x} = B\underline{y}\,, \quad \underline{y} = C\underline{x}$$

Che relazione c'è fra B e C ?
Sia U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$. Determinare l'equazione cartesiana di U nelle coordinate (y_1, y_2).

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$. È facile verificare che l'applicazione lineare definita da

$$F(1,1,0) = (1,2,-1)\,, \quad F(0,1,1) = (-1,1,1)\,, \quad F(0,0,1) = (-1,0,1)$$

è ben definita [1].
Consideriamo la base canonica

$$\mathcal{E} = \{\underline{e}_1 := (1,0,0), \underline{e}_2 := (0,1,0), \underline{e}_3 := (0,0,1)\}$$

in $\mathbb{R}^3$.
Determinare la matrice A associata ad F con la seguente scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E}\,, \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}$$

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata. Sia P l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ definita da

$$P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \tag{1}$$

con $\{\underline{g}_1 = (2,0,1)\,, \underline{g}_2 = (1,3,0)\,, \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. È subito visto che questi 3 vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata a P in questa base (quindi, base di partenza = base di arrivo = base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2\, \underline{g}_3\}$).

[1] i tre vettori $\{(1,1,0); (0,1,1); (0,0,1)\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$