Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 23/11/13 (tredicisimo compito).
SOLUZIONI.

Soluzione esercizio 1. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ e sia $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. La matrice B del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è *la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate del j-mo vettore della base* $\mathcal{B}'$ *rispetto alla base* $\mathcal{B}$. Nel nostro caso

$$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \,, \quad \underline{v}_2 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$$

e quindi

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ne segue, per quanto visto a lezione che

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

da cui segue anche

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

(e quindi $C = B^{-1}$.) Calcoliamo l'inversa dell matrice $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ mediante l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

Abbiamo cioè

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Sia infine U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$. Sostituendo, vediamo che il sottospazio U ha equazione $(y_1 + y_2) - 3(y_1 - y_2) = 0$ e cioè $-2y_1 + 4y_2 = 0$ nelle coordinate (y_1, y_2).

Soluzione esercizio 2. Usiamo la linearità di F. Vogliamo calcolare le coordinate di $F(\underline{e}_1)$, $F(\underline{e}_2)$, $F(\underline{e}_3)$ nella base canonica; queste saranno le colonne della matrice cercata. Esprimiamo allora $\underline{e}_1$ come combinazione lineare degli elementi della nuova base $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\} \equiv \{(1,1,0); (0,1,1); (0,0,1)\}$, perché è su questi vettori che sappiamo calcolare F, ed applichiamo la linearità di F. In questo caso l'espressione di $(1,0,0)$ in funzione di $\{\underline{e}'_j\}$ è molto facile a stabilirsi:

$$(1,0,0) = (1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,1)$$

Quindi
$F(1,0,0) = F\left((1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,1)\right) = F(1,1,0) - F(0,1,1) + F(0,0,1) =$
$(1,2,-1) - (-1,1,1) + (-1,0,1) = (1, 1 - 1)$
e questa è proprio la prima colonna della matrice A, Analogamente
$F(0,1,0) = F\left((0,1,1) - (0,0,1)\right) = F(0,1,1) - F(0,0,1) =$
$(-1,1,1) - (-1,0,1) = (0,1,0)$

che è la seconda colonna della matrice A. Notiamo che $F(0,0,1)$ è dato nel testo dell'esercizio.
In definitiva

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Osserviamo che in questo caso era particolarmente semplice scrivere le coordinate dei vettori della base canonica rispetto alla base $\{\underline{e}'_j\}$. In generale bisognerà impostare 3 sistemi 3×3. Una soluzione alternativa a questo esercizio è data più avanti, dopo l'esercizio 3.
Osservazione. Possiamo utilizzare A per studiare F. Il rango di A è due, come subito si verifica applicando l'eliminazione di Gauss. L'immagine di F è quindi generata dai due vettori colonna di A non-proporzionali, ad esempio il primo ed il secondo. In particolare F non è suriettiva. Ne segue che non è neanche iniettiva; infatti il nucleo di F è il sottospazio vettoriale soluzione del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$. Dato che il rango è 2 si ha che $\mathrm{Ker}F$ è un sottospazio di dimensione $3 - 2 = 1$.

Soluzione esercizio 3. La matrice associata a P rispetto alla base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2\, \underline{g}_3\}$ ha come colonne le coordinate di $P(\underline{g}_1), P(\underline{g}_2)$ e $P(\underline{g}_3)$ rispetto alla base $\mathcal{G}$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} P(\underline{g}_1) = P(2\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = 2P(\underline{e}_1) + P(\underline{e}_3) &= 2(2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + (\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 5\underline{g}_1 + \underline{g}_2 - 3\underline{g}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\underline{g}_2) = P(\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2) = P(\underline{e}_1) + 3P(\underline{e}_2) &= (2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + 3(\underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 2\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + \underline{g}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\underline{g}_3) = P(\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3) = P(\underline{e}_2) + 2P(\underline{e}_3) &= (\underline{g}_2 + \underline{g}_3) + 2(\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 2\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + 3\underline{g}_3 \end{aligned}$$

La matrice che rappresenta P nella base $\mathcal{G}$ è pertanto

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$