Geometria

*Canale 3. Lettere J-PE (Prof P. Piazza)*

*ATTENZIONE: non sono ammessi cambi di canale.*

**Primo esonero. Compito A.**

21 Novembre 2013

*Nome e Cognome:* ____________________

*Numero di Matricola:* ____________________

| Esercizio | Punti totali | Punteggio |
|---|---|---|
| 1 | 7 | |
| 2 | 6 | |
| 3 | 6 | |
| 4 | 6 | |
| 5 | 7 | |
| Totale | 32 | |

**ATTENZIONE : GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI !**

**Esercizio 1.**
**1.1** Sia $V_1 = M_{22}(\mathbb{R})$ e $W_1 = \{A \in V$ tali che $A = A^T$ e $a_{11} + a_{22} = 0\}$. Stabilire se $W_1$ è un sottospazio di $V_1$ ed in caso affermativo determinarne una base.
**1.2** Sia $V_2$ lo spazio vettoriale delle applicazioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sia $W_2 = \{f \in V \mid f(0) = f(2)+1\}$. Stabilire se $W_2$ è un sottospazio di $V_2$.
**1.3** Sia $V_3 = M_{33}(\mathbb{R})$ e sia $W_3 = \{A \in V \mid$ esiste $B \in V$ tale che $AB = I_3\}$ con $I_3$ la matrice identità in $M_{33}(\mathbb{R})$. Stabilire se $W_3$ è un sottospazio di $V_3$ ed in caso affermativo determinarne una base.
**1.4** Sia $V_4 = \mathbb{R}^5$ e $W_4 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = 0\}$. Stabilire se $W_4$ è un sottospazio di $V_4$ ed in caso affermativo determinarne una base.
**Facoltativo:** una matrice $A$ in $M_{nn}(\mathbb{R})$ è nilpotente se esiste $k \in \mathbb{N}^+$ tale che $A^k = 0$. ($A^k$ è il prodotto righe per colonne di $A$ con se stessa $k$ volte; 0 è la matrice nulla.) Sia $N \subset M_{22}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici nilpotenti. Verificare che $N$ contiene le matrici $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$. Stabilire se $N$ è un sottospazio di $V = M_{22}(\mathbb{R})$ ed in caso affermativo determinarne una base.

**Soluzione**:
**1.1** $W_1$ è l'intesezione del sottospazio $\mathcal{S}_{22}$ costituito dalle matrici simmetriche e del sottoinsieme $\mathcal{T}_{22}$ delle matrici tali che $a_{11} + a_{22} = 0$. È immediato verificare che $\mathcal{T}_{22}$ è di fatto un sottospazio. Ne segue che $\mathcal{S}_{22} \cap \mathcal{T}_{22}$, che è $W_1$, è un sottospazio. $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ appartiene a $W_1$ se e solo se è della forma $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{vmatrix}$. Ne segue che

$$W_1 = \mathrm{Span}\left( \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

e dato che queste due matrici sono linearmente indipendenti perché non-proporzionali, ne deduciamo che sono una base di $W_1$.
**1.2** $W_2$ non è un sottospazio perché non contiene l'applicazione nulla (che è il vettore nullo di $V_2$).
**1.3** $W_3$ non è un sottospazio perché non contiene la matrice nulla (che è il vettore nullo di $V_3$).
**1.4** $W_4$, che è l'unione insiemetistica degli iperpiani coordinati (quelli di equazione cartesiana $x_j = 0$), non è un sottospazio. Ad esempio $\underline{w} = (1,0,0,0,0) \in W_4$ e $\underline{w}' = (0,1,1,1,1) \in W_4$ ma $\underline{w} + \underline{w}' = (1,1,1,1,1) \notin W_4$.
**Facoltativo.** È immediato verificare che

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e quindi queste due matrici sono nilpotenti. La loro somma è $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ e si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e con un semplice ragionamento si vede allora che $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ **non** è nilpotente. Ne segue che $N$ non è un sottospazio.

**Esercizio 2.** Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ e $\underline{w}$ i vettori di $\mathbb{R}^5$ dati da

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_5 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Stabilire se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$F(\underline{v}_1) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \; F(\underline{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \; F(\underline{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \; F(\underline{v}_4) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \; F(\underline{v}_5) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

e in caso affermativo:
(i) calcolare l'immagine tramite $F$ del vettore $\underline{w}$.
(ii) stabilire se $F$ è iniettiva.
(iii) determinare l'immagine di $F$.

*Soluzione.* E' immediato osservare che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^5$. Infatti la matrice che ha per colonne questi vettori è una matrice quadrata triangolare superiore con tutti i pivot diversi da zero, e dunque è non singolare. Ne segue che esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ con le proprietà richieste. Per determinare l'immagine del vettore $(3, 2, 1, 0, 0)$ mediante l'applicazione $F$, calcoliamo le coordinate del vettore $(3, 2, 1, 0, 0)$ rispetto alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ Cerchiamo cioè i numeri reali $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ tali che $x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + x_3\underline{v}_3 + x_4\underline{v}_4 + x_5\underline{v}_5 = (3, 2, 1, 0, 0)$, ovvero cerchiamo le soluzioni del sistema lineare la cui matrice è

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

Applicando l'algoritmo di eliminazione di Gauss, troviamo

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

ovvero $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 0, 0)$. In altre parole $(3, 2, 1, 0, 0) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$. A questo punto, per calcolare $F(3, 2, 1, 0, 0)$ basta utilizzare la linearità di $F$:

$$F(3, 2, 1, 0, 0) = F(\underline{v}_1 + \underline{v}_1 + \underline{v}_3) = F(\underline{v}_1) + F(\underline{v}_2) + F(\underline{v}_3)$$
$$= \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

L'applicazione $F$ non può essere iniettiva perché non possono esserci applicazioni iniettive da uno spazio vettoriale di dimensione maggiore ad uno di dimensione minore.

L'immagine di $F$ è tutto $\mathbb{R}^4$ perché Im$F$ è lo Span di

$$\underline{u}_1 := \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{u}_2 := \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \ \underline{u}_3 := \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \ \underline{u}_4 := \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \ \underline{u}_5 := \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

che certamente contiene Span$(\underline{u}_5, \underline{u}_4, \underline{u}_3, \underline{u}_4)$. Ma la matrice che ha questi vettori come colonne ha ovviamente rango 4 e quindi $\dim(\text{Span}(\underline{u}_5, \underline{u}_4, \underline{u}_3, \underline{u}_4)) = 4$ il che implica che Im$F = \mathbb{R}^5$.

**Esercizio 3.** Consideriamo le quadruple

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ t \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 \\ t \\ 2(t-1) \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 \\ t \\ 2 \\ (t-1) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 \\ t \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$ e sia $W_t$ il loro Span in $\mathbb{R}^4$.
Determinare la dimensione di $W_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
Per quei $t \in \mathbb{R}$ tali che $\dim W_t < 4$ determinare equazioni **cartesiane** di un supplementare di $W_t$ (e cioè di un sottospazio $U_t$ tale che $W_t \oplus U_t = \mathbb{R}^4$).

**Soluzione**: Occorre studiare il rango della matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & t & t \\ t & 2(t-1) & 2 & 2 \\ 1 & 1 & t-1 & 1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo Gauss: dopo il primo passo otteniamo subito

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-2 & t-2 & t-2 \\ 0 & t-2 & 2-t & t-2 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \end{vmatrix} \tag{1}$$

Se $t = 2$ la matrice ha rango 1 e quindi $W_{t=2}$ ha dimensione 1. Se $t \neq 2$ allora possiamo moltiplicare la seconda, terza e quarta riga di (1) per $1/(t-2)$ (sappiamo che otteniamo in questo modo una matrice dello stesso rango). Otteniamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Riducendo ulteriormente otteniamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ne deduciamo che per ogni $t \neq 2$ la matrice che ha come colonne i generatori di $W_t$ è non singolare ed ha quindi rango uguale a 4. Conclusione:

$$\dim W_t = 4 \text{ se } t \neq 2\,; \quad \dim W_t = 1 \text{ se } t = 2\,.$$

Per rispondere all'ultimo quesito ragioniamo come segue: per $t = 2$ sappiamo che $W_2 = \mathrm{Span}(\underline{w})$ con $\underline{w} = (1, 2, 2, 1)$. Consideriamo l'iperpiano $U_2$ di equazione cartesiana $x_1 + x_2 = 0$. Abbiamo scelto questa equazione in modo tale che $\underline{w}$ **non** la soddisfi. Quindi $\underline{w} \notin U_2$. Allora:

$$\dim U_2 = 3\,; \quad W_2 \cap U_2 = \underline{0}$$

e quindi, per Grassmann,

$$\dim(U_2 + W_2) = \dim U_2 + \dim W_2 = 3 + 1 = 4$$

Ne segue che $U_2 \oplus W_2 = \mathbb{R}^4$.

**Esercizio 4.** Siano $U, V \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi dati da

$$U = \mathrm{Span}\left( \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 2 \\ -2 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 4 \\ -3 \\ -1 \end{array} \right| \right), \quad V = \mathrm{Span}\left( \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 7 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} -3 \\ 3 \\ 5 \end{array} \right| \right).$$

Determinare una base di $U \cap V$.
Stabilire se $\mathbb{R}^3 = U + V$.

**Soluzione**: Esprimiamo $U$ e $V$ come soluzioni di sistemi lineari omogenei e troviamo una base di $U \cap V$ risolvendo il sistema ottenuto prendendo sia le equazioni per $U$ che le equazioni per $V$.
Per trovare una base di $U$ operiamo una riduzione di Gauss sulla matrice

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{array} \right|.$$

Scopriamo in questo modo che $U$ ha dimensione 2 e che una base è data, ad esempio, dai primi due vettori colonna. Analogamente procediamo per $V$ e scopriamo che $V$ ha dimensione 2 e che una sua base è data dalle prime due colonne. Ora operiamo con Gauss su

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 2 & -2 & x_2 \\ -3 & 0 & x_3 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 7 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \end{array} \right|$$

applichiamo la compatibilità e otteniamo

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -6 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 7 & x_1 \\ 0 & 6 & x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - x_3 \end{array} \right|$$

da cui deduciamo che

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \qquad V = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

Quindi $U \cap V$ è costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troviamo che $U \cap V = \mathrm{Span}(-7, 2, 5)$.
Da Grassmann otteniamo che $\dim(U + V) = 2 + 2 - 1 = 3$; quindi $U + V = \mathbb{R}^3$.

**Esercizio 5.** Stabilire se la seguente matrice $A$ è invertibile ed in caso affermativo calcolare $A^{-1}$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**Facoltativo:** considerare l'applicazione $T : M_{33}(\mathbb{R}) \to M_{33}(\mathbb{R})$ definita dalla legge $T(X) := AX$. Dimostrare che $T$ è lineare; stabilire se $T$ è bigettiva.

**Soluzione**: La riduzione a scala dimostra che $A$ ha rango 3 ed è quindi invertibile. L'inversa si ottiene con il noto metodo; scriviamo

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

riduciamo con Gauss a scendere, a salire e infine dividiamo ogni riga per il corrispondente pivot nella matrice di sinistra. La matrice che otteniamo a destra è l'inversa di $A$. Otteniamo

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 \end{vmatrix}$$

L'applicazione $T : M_{33}(\mathbb{R}) \to M_{33}(\mathbb{R})$ è lineare perché il prodotto righe per colonne è distributivo e gode della proprietà che $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$. L'applicazione $T$ è iniettiva: se $T(X_1) = T(X_2)$ allora $AX_1 = AX_2$ e moltiplicando a sinistra per $A^{-1}$ e applicando l'associatività del prodotto otteniamo $I_3X_1 = I_3X_2$ e cioè $X_1 = X_2$. Quindi $T$ è lineare ed iniettiva, ed essendo un endomorfismo è anche suriettiva. Conclusione: $T$ è lineare e bigettiva.