Geometria

Canale 3. Lettere J-PE (Prof P. Piazza)

ATTENZIONE: non sono ammessi cambi di canale.

Primo esonero. Compito A.

21 Novembre 2013

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	6	
3	6	
4	6	
5	7	
Totale	32	

ATTENZIONE : GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI !

Esercizio 1.
1.1 Sia $V_1 = M_{22}(\mathbb{R})$ e $W_1 = \{A \in V$ tali che $A = A^T$ e $a_{11} + a_{22} = 0\}$. Stabilire se W_1 è un sottospazio di V_1 ed in caso affermativo determinarne una base.
1.2 Sia V_2 lo spazio vettoriale delle applicazioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sia $W_2 = \{f \in V \mid f(0) = f(2)+1\}$. Stabilire se W_2 è un sottospazio di V_2.
1.3 Sia $V_3 = M_{33}(\mathbb{R})$ e sia $W_3 = \{A \in V \mid$ esiste $B \in V$ tale che $AB = I_3\}$ con I_3 la matrice identità in $M_{33}(\mathbb{R})$. Stabilire se W_3 è un sottospazio di V_3 ed in caso affermativo determinarne una base.
1.4 Sia $V_4 = \mathbb{R}^5$ e $W_4 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = 0\}$. Stabilire se W_4 è un sottospazio di V_4 ed in caso affermativo determinarne una base.
Facoltativo: una matrice A in $M_{nn}(\mathbb{R})$ è nilpotente se esiste $k \in \mathbb{N}^+$ tale che $A^k = 0$. (A^k è il prodotto righe per colonne di A con se stessa k volte; 0 è la matrice nulla.) Sia $N \subset M_{22}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici nilpotenti. Verificare che N contiene le matrici $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$. Stabilire se N è un sottospazio di $V = M_{22}(\mathbb{R})$ ed in caso affermativo determinarne una base.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 2. Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ e $\underline{w}$ i vettori di $\mathbb{R}^5$ dati da

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_5 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Stabilire se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$F(\underline{v}_1) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_4) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_5) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

e in caso affermativo:

(i) calcolare l'immagine tramite F del vettore $\underline{w}$.
(ii) stabilire se F è iniettiva.
(iii) determinare l'immagine di F.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 3. Consideriamo le quadruple

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ t \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 \\ t \\ 2(t-1) \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 \\ t \\ 2 \\ (t-1) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 \\ t \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$ e sia W_t il loro Span in $\mathbb{R}^4$.
Determinare la dimensione di W_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.
Per quei $t \in \mathbb{R}$ tali che $\dim W_t < 4$ determinare equazioni **cartesiane** di un supplementare di W_t (e cioè di un sottospazio U_t tale che $W_t \oplus U_t = \mathbb{R}^4$).

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 4. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi dati da

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare una base di $U \cap V$.
Stabilire se $\mathbb{R}^3 = U + W$.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 5. Stabilire se la seguente matrice A è invertibile ed in caso affermativo calcolare A^{-1}:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Facoltativo: considerare l'applicazione $T : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ definita dalla legge $T(X) := AX$. Dimostrare che T è lineare; stabilire se T è bigettiva.

Soluzione:

Risposta: