Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14.
Canale 3. Prof. P. Piazza
Soluzione del compito a casa del 16/11/13 (dodicesimo compito).

Soluzione esercizio 1. Si ha

$$AB = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 2. Una matrice $n \times n$ è invertibile se e solo se è non-singolare, cioè se e solo se il rango è uguale a n. Utilizzando la riduzione di Gauss si verifica facilmente che per la nostra matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$ si ha $\mathrm{rg}(A) = 3$. La matrice data è quindi invertibile. Per determinare l'inversa scriviamo

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right|\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

e applichiamo Gauss a scendere, Gauss a salire e la divisione per i pivots. Otteniamo

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right|\left|\begin{array}{ccc} 3/7 & 1/7 & -2/7 \\ -2/7 & -3/7 & 6/7 \\ -1/7 & 2/7 & 3/7 \end{array}\right|$$

Ne segue che

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 3/7 & 1/7 & -2/7 \\ -2/7 & -3/7 & 6/7 \\ -1/7 & 2/7 & 3/7 \end{vmatrix}$$

L'inversa di L_A è data da $L_{A^{-1}}$.

Soluzione esercizio 3. Occorre ridurre a scala la matrice completa del sistema utilizzando il metodo di Gauss. Consideriamo quindi

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & t & t & t \\ t & 2(t-1) & 2 & 2 & t^2-2 \\ 1 & 1 & t-1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Dopo il primo passo otteniamo subito

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-2 & t-2 & t-2 & t-2 \\ 0 & t-2 & 2-t & t-2 & t^2-t-2 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 & 0 \end{array}\right| \tag{1}$$

Se $t = 2$ il sistema è allora equivalente alla singola equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

che ha infinite soluzioni, ottenute risolvendo x_1 (che è quindi variabile dipendente) in funzione delle altre variabili (che sono quindi le variabili libere). Esplicitamente, scriviamo $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 + 1$, aggiungiamo le identità $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$, $x_4 = x_4$ ottenendo

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 + 1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = x_2 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Otteniamo in questo modo l'insieme di soluzioni nella forma voluta, e cioè come il sottospazio affine $\underline{v}_0 + W$ con

$$\underline{v}_0 = \left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right| \quad \text{e} \quad W = \operatorname{Span}\left(\left|\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right| \right). \tag{2}$$

Se $t \neq 2$ allora possiamo moltiplicare la seconda, terza e quarta riga di (1) per $1/(t-2)$. Otteniamo la matrice

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & t+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Riducendo ulteriormente otteniamo la matrice

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & t \\ 0 & 0 & 0 & -1 & t/2 \end{array}\right|$$

Notare che la matrice dei coefficienti non dipende da t. Ne deduciamo che per ogni $t \neq 2$ la matrice dei coefficienti ha rango 4 ed esiste quindi unica la soluzione. Fissato $t \neq 2$ otteniamo la soluzione $x_1 = 0, x_2 = (t+2)/t, x_3 = 0, x_4 = -t/2$.
L'applicazione lineare definita da A_t è bigettiva per ogni $t \neq 2$. Per questi t il nucleo è banale e l'immagine è tutto $\mathbb{R}^4$.
Per $t = 2$ il nucleo è il sottospazio W che compare nella formula (2). Una base è data dai vettori che compaiono in (2). L'immagine ha dimensione uguale al rango della matrice A_t per $t = 2$ che sappiamo essere uguale a 1 (potete in alternativa applicare il teorema della dimensione). L'immagine è generata da una qualsiasi colonna della matrice A_t, $t = 2$, ad esempio $(1, 2, 2, 1)$.