Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 13/11/13 (undicesimo compito)

Esercizio 1. Siano V e W due spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un isomorfismo. Verificare che F trasforma vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W. Dedurne che F trasforma sottospazi di dimensione k di V in sottospazi di dimensione k di W. Verificare che le stesse proprità sono valide se F è (lineare) iniettiva.

Esercizio 2. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ parallelo al sottospazio $W = \mathrm{Span}(1, -1, 2)$ e contenente il vettore $\underline{v}_0 := (0, 1, 0)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema di 4 equazioni in 5 incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 4t \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Scrivere la matrice A dei coefficienti del sistema. Scrivere la matrice completa del sistema. Studiare la compatibilità del sistema al variare di $t \in \mathbb{R}$. Sia $t = 1$. Determinare l'insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}^5$ delle soluzioni del sistema. Scrivere Σ nella forma $\underline{v}_0 + \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell)$ per opportuni $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell$ in $\mathbb{R}^5$. Sia L_A l'applicazione lineare definita dalla matrice A dei coefficienti del sistema. Determinare una base per $\mathrm{Ker} A$ ed una base per $\mathrm{Im} L_A$.

Esercizio 4. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare la cui espressione in coordinate è data da

$$T \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{vmatrix}$$

Determinare A tale che $T = L_A$. Sia $S : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare la cui espressione in coordinate è data da:

$$S \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 + y_2 + y_3 - y_5 \\ y_3 + y_4 \end{vmatrix}$$

Determinare B tale che $S = L_B$.