Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 13/11/13 (undicesimo compito).
SOLUZIONI.

Soluzione esercizio 1. Sia $F : V \to W$ un isomorfismo. Siano $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti di V. Dobbiamo verificare che $\{F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)\}$ sono vettori linearmente indipendenti di W. Per linearità di F si ha

$$\alpha_1 F(\underline{v}_1) + \cdots + \alpha_k F(\underline{v}_k) = 0 \Leftrightarrow F(\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k) = 0$$

ovvero se e solo se $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k \in \ker F$. Ma F è iniettiva per ipotesi, dunque $\ker F = \{0\}$; ne segue $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k = 0$. Ma i vettori $\underline{v}_i$ sono linearmente indipendenti per ipotesi, dunque dev'essere $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ come volevamo dimostrare.

Sia ora V_0 un sottospazio di dimensione k di V e sia $W_0 := F(V_0)$ la sua immagine in W. Essendo immagine di un sottospazio mediante un'applicazione *lineare*, W_0 è un sottospazio di W. Dobbiamo solo dimostrare che W_0 ha dimensione k. Poiché V_0 ha dimensione k, esisterà una base $\{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k\}$ di V_0. Questi vettori sono indipendenti in V e dunque, per la prima parte dell'esercizio, i vettori $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)$ sono indipendenti in W. Inoltre $F(\underline{v}_i) \in F(V_0) =: W_0$, dunque i vettori $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)$ sono vettori indipendenti di W_0. Essi sono anche un sistema di generatori per W_0. Infatti se $\underline{w} \in W_0$ allora $\underline{w} = F(\underline{v})$ per qualche $\underline{v} \in V_0$. Poiché $\{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k\}$ è una base di V_0, esistono scalari α_i tali che $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots \alpha_k \underline{v}_k$. Ne segue

$$\underline{w} = F(\underline{v}) = \alpha_1 F(\underline{v}_1) + \cdots \alpha_k F(\underline{v}_k)$$

Abbiamo così dimostrato che $\{F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)\}$ è un sistema di generatori indipendenti per W_0, ovvero è una base di W_0; essendo costituita da k elementi, si ha $\dim W_0 = k$.

Osserviamo che abbiamo dimostrato qualcosa di più forte: *un'applicazione lineare iniettiva manda vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W* e, analogamente, *un'applicazione lineare iniettiva manda sottospazi k-dimensionali di V in sottospazi k-dimensionali di W*

Soluzione esercizio 2. Applicando la condizione di compatibilità vediamo che il sottospazio $W = \mathrm{Span}(1, -1, 2)$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

cioè $B\underline{x} = \underline{0}$ con

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Basta allora applicare la Proposizione 6.4. Le equazioni cartesiane del sottospazio affine sono

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

dove i termini noti sono ottenuti sostituendo nel membro a sinistra delle equazioni i valori $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Soluzione esercizio 3. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice completa è

$$A|b = \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4t \end{array}\right|$$

Per studiare al compatibilità del sistema utilizziamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss:

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4t \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4t-3 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4t-3 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t-4 \end{array}\right|$$

Dunque il sistema ammette soluzioni solamente se $4t - 4 = 0$ ovvero se e solo se $t = 1$. Per questo particolare valore di t, la matrice del sistema ridotto a scala è

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Le ultime due righe corrsispondono all'identità $0 = 0$ e possono essere eliminate. Rimaniamo così con la matrice

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

che mediante un'ulteriore eliminazione diventa

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Le variabili dipendenti sono x_1 e x_3, quelle libere, x_2, x_4, x_5. Otteniamo,

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \text{Span}\left(\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

che è proprio la forma richiesta nel testo dell'esercizio. Notiamo che da questa soluzione segue anche che

$$\ker L_A = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

Infine, l'immagine di L_A è generata dalle colonne della matrice A. Per estrarre una base basta utilizzare la riduzione di Gauss già operata: i due pivot erano posizionaati nella colonna $j_1 = 1$ e nella colonna $j_2 = 3$. Una base di $\text{Im}L_A$ è data dunque dai due vettori A^1 e A^3. Osserviamo che $L_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ e

$$\dim \text{Im}L_A = 2 = 5 - 3 = 5 - \dim \ker L_A,$$

come deve essere.

Soluzione esercizio 4. A e B sono le matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$