

Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 11/11/13 (decimo compito)

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^5 definito come l'insieme degli $\underline{x} \in \mathbb{R}^5$ soluzioni di

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

1.1 Determinare la dimensione di U . Determinare una base di U .

1.2 Determinare $\ell \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e un'applicazione lineare iniettiva $T : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^5$ che abbia come immagine U (vi ricordo che un'applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base del dominio).

1.3 Determinare l'espressione in coordinate di T e cioè una matrice C tale che $T = L_C$ (cercate di determinare le colonne di C).

1.4 Determinare equazioni parametriche per U .

Esercizio 2. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio W di \mathbb{R}^5 definito da

$$W = \text{Span} \left(\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & 1 \\ 0 & & 1 \\ -1 & & 1 \\ -1 & & -1 \\ 0 & & -1 \end{array} \right) \right)$$

Esercizio 3. Determinare una base per $U \cap W$, con U il sottospazio dell'esercizio 1 e W il sottospazio dell'esercizio 2.

Esercizio 4. (Molto istruttivo) Sia $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Quindi $Q = L_A$.

(4.0) Scrivere l'espressione di Q in coordinate.

(4.1) Determinate equazioni cartesiane e parametriche per $\text{Ker}(Q)$ e $\text{Im}Q$. Studiare l'iniettività/suriettività di Q . Determinare la controimmagine del vettore $(2, -1, 5)$ ¹

(4.2) Determinare l'immagine tramite Q della retta² di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

(4.3) Determinare equazioni cartesiane per l'immagine del piano π di equazione $x_1 - x_3 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\pi)$?

(4.4) Determinare equazioni parametriche per l'immagine del piano σ di equazione $5x_1 - 3x_2 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\sigma)$?

¹Vi ricordo che se $f : A \rightarrow B$ è un'applicazione fra insiemi, allora la controimmagine di $b \in B$ tramite f è il sottoinsieme di A definito da $\{a \in A \mid f(a) = b\}$. Analogamente si definisce la controimmagine di un sottoinsieme di B . La controimmagine di b tramite f viene denotata con $f^{-1}(b)$.

²Se $f : A \rightarrow B$ è un'applicazione fra insiemi, allora l'immagine di un sottoinsieme A' di A mediante f è il sottoinsieme di B definito da $f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}$.

2

Confrontare le dimensioni di $Q(\pi)$ e $Q(\sigma)$. C'è qualcosa di strano oppure è tutto OK ?
Cercate di spiegare cosa succede.