

Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 11/11/12 (decimo compito).
SOLUZIONI.

Soluzione esercizio 1. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Operando con Gauss ¹ otteniamo la matrice a scala:

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

che ha due pivot:

$p_1 = 1$ nella colonna $j_1 = 1$

$p_2 = 1$ nella colonna $j_2 = 3$.

S , e quindi A , ha rango 2; ne segue che la dimensione di U , che è per definizione la dimensione di $\text{Ker}A$, è uguale a $5 - 2 = 3$.

Per rispondere al secondo quesito risolviamo il sistema, trovando quindi una base di $U (= \text{Ker}A = \text{Ker}S)$. Le variabili dipendenti nel sistema a scala sono x_1 e x_3 ; quelle libere x_2, x_4, x_5 . Esplicitando rispetto alle variabili dipendenti otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + x_5 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

e quindi, ragionando come al solito,

$$U = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| \end{pmatrix} \right)$$

I tre vettori trovati sono necessariamente linearmente indipendenti e sono quindi una base di U . Torniamo alla domanda **1.2**: basterà scegliere $\ell = 3$ e l'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ definita univocamente dalla legge

$$e_1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad e_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad e_3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Questa è l'applicazione L_C con $C \in M_{5,3}(\mathbb{R})$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

¹(Terza riga \rightarrow Terza riga - Prima riga); poi (Terza riga \rightarrow Terza riga - Seconda riga)

Dato che $\dim \text{Ker} L_C = 3 - \text{rg} C = 3 - 3 = 0$, ne segue che L_C è iniettiva. L'applicazione L_C fornisce quindi una parametrizzazione di U .

Per scrivere equazioni parametriche di U basterà considerare la base di U trovata sopra: $\underline{x} \in U$ se e solo se \underline{x} è combinazione lineare di quei tre vettori. Otteniamo

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = s + t + u \\ x_2 = s \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \\ x_5 = u \end{cases}$$

e al variare di $s, t, u \in \mathbb{R}$ otteniamo tutti i vettori di U . Le (1) sono quindi le equazioni parametriche di U .

Soluzione esercizio 2. Procediamo come spiegato nel libro di testo, Esempio 6.11. Quindi $\underline{x} \in W$ se e solo se il sistema $A\underline{v} = \underline{x}$ ha soluzione, con

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Riducendo a scala

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \\ -1 & -1 & x_4 \\ 0 & -1 & x_5 \end{vmatrix}$$

otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 + x_1 - 2x_2 \\ 0 & 0 & x_4 + x_1 \\ 0 & 0 & x_5 + x_2 \end{vmatrix}$$

Imponendo la compatibilità otteniamo le equazioni cartesiane di W che sono

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 3. Abbiamo equazioni cartesiane per U e W ; è ovvio che $U \cap W$ coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema ottenuto considerando le equazioni di U e le equazioni di W . Conviene chiaramente esprimere U tramite le sue equazioni ridotte. Queste sono le equazioni $S\underline{x} = \underline{0}$ con S la ridotta di A .²

²In alternativa, basta prendere le prime due equazioni del sistema 3×5 che definiva U ; spieghiamo meglio questo punto.

Sappiamo che la matrice che definisce U , la matrice A , ha rango 2; quindi il massimo numero di righe linearmente indipendenti è due; dato che le prime due righe sono non-proporzionali ne deduciamo che la terza riga è combinazione lineare delle prime due; dal Lemma fondamentale sappiamo allora che il sistema 3×5 che definisce U è equivalente al sistema 2×5 dato dalle prime due equazioni.

Quindi, in definitiva, per l'intersezione otteniamo il sistema 5×5 con le prime due equazioni date da $S\underline{x} = \underline{0}$ e le altre tre date dall'esercizio 2:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Basterà allora ridurre con Gauss e risolvere come al solito.

Soluzioni esercizio 4.

4.0 L'espressione di Q in coordinate è

$$Q(\underline{x}) = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}.$$

4.1 Si ha

$$\text{Ker}Q = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \\ -2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}\}$$

e si tratta come al solito di risolvere il sistema e trovare una base per lo spazio delle soluzioni. Si trova un nucleo di dimensione 1 generato dal vettore $(3, 5, 2)$. Lo spazio immagine ha dimensione 2, generato ad esempio dalle prime 2 colonne di A che sono chiaramente non-proporzionali. L'applicazione lineare Q non è iniettiva, dato che il nucleo è non banale; Q non è suriettiva, dato che l'immagine ha dimensione 2. Equazioni parametriche di $\text{Ker}Q$ sono

$$\begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 5t \\ x_3 = 2t \end{cases}$$

equazioni parametriche per l'immagine sono

$$\begin{cases} x_1 = s - t \\ x_2 = 2s \\ x_3 = -2t \end{cases}$$

Equazioni cartesiane si ottengono dalle basi di $\text{Ker}Q$ e $\text{Im}Q$ procedendo come negli esercizi precedenti.

Per determinare la controimmagine di $(2, -1, 5)$ tramite Q basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_3 = -1 \\ -2x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

4.2 Risolvendo il sistema scopriamo che la retta è generata dal vettore $(1, -2, 1)$. Questo vettore viene trasformato in $(4, -1, 1)$ da Q . L'immagine della retta è il sottospazio generato da $(4, -1, 1)$ ³.

4.3 $Q(\pi)$ si ottiene fissando una base di π e trasformandola con Q . Vediamo i dettagli; un base di π è data da $\{\underline{v}_1 = (1, 0, 1), \underline{v}_2 = (0, 1, 0)\}$. Si ha allora:

$$Q(\pi) = \{Q(\underline{v}), \underline{v} \in \pi\} = \{Q(\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \{\alpha_1 Q(\underline{v}_1) + \alpha_2 Q(\underline{v}_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \text{Span}(Q\underline{v}_1, Q\underline{v}_2) = \text{Span}((2, -1, 5), (-1, 0, 3))$$

³per capire questo punto ragioniamo come segue: sia r la retta; allora $Q(r) = \{Q(\underline{v}), \underline{v} \in r\} = \{Q(\alpha(1, -2, 1)), \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha Q(1, -2, 1), \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{Span}(Q(1, -2, 1)) = \text{Span}(4, -1, 1)$

Conclusione: l'immagine tramite Q di π è un piano e più precisamente il piano $\text{Span}((2, -1, 5), (-1, 0, 3))$.

4.4 Una base per σ è data da $\{\underline{w}_1 = (3, 5, 0), \underline{w}_2 = (0, 0, 1)\}$; procedendo come nel punto precedente troviamo che l'immagine di σ tramite Q è data da $\text{Span}(Q\underline{w}_1, Q\underline{w}_2) = \text{Span}(Q(3, 5, 0), Q(0, 0, 1)) = \text{Span}((-2, 6, -10), (1, -3, 5))$.

In questo caso l'immagine di σ ha dimensione 1 (infatti i due vettori nell'ultimo span sono proporzionali). Conclusione: $Q(\sigma)$ è la retta generata da $(1, -3, 5)$.

Le equazioni parametriche dell'immagine di σ tramite Q sono ottenute come negli esercizi precedenti.

Per spiegare come sia possibile che l'immagine di π abbia dimensione 2 mentre quella di σ abbia dimensione 1 osserviamo che σ contiene il nucleo di Q mentre π ha intersezione banale con tale nucleo.