Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 8/11/13 (nono compito).
SOLUZIONI.

Soluzione esercizio 1. Determiniamo innanzitutto basi per questi due sottospazi, utilizzando la riduzione a scala. Scopriamo che

$$U = \text{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| \right), \quad V = \text{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{array} \right| \right).$$

È chiaro che queste due coppie di vettori sono basi rispettivamente per U e V. Vi ricordo che dobbiamo verificare che $U+V = \mathbb{R}^4$ e $U \cap V = \underline{0}$. Avendo determinato basi per U e V notiamo peró che non dobbiamo verificare entrambe le condizioni: infatti, applicando la formula di Grassmann scopriamo che se i 2+2=4 vettori trovati sono linearmente indipendenti, allora, essendo necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$, si deve avere $\dim U \cap V = 0$, dato che $\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2+2-4$. Per verificare se i quattro vettori sono linearmente indipendenti basta mettere i 4 vettori in colonna e ridurre con Gauss. Scopriamo che il rango della relativa matrice 4×4 è proprio 4; ne segue che i 2+2=4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi, necessariamente, una base di $\mathbb{R}^4$, come volevasi. Conclusione: $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Soluzione esercizio 2 Sappiamo che

$$\text{Ker}(L_A) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid L_A(\underline{x}) = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{0}\}\,;$$

basta allora risolvere il sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ trovandone una base. Abbiamo visto molti esercizi di questo tipo: riducendo con Gauss, risolvendo il sistema e "mettendo in evidenza le variabile libere" otteniamo che

$$\text{Ker}(L_A) = \text{Span}\left(\left| \begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| \right).$$

Dato che il nucleo è non banale, ne segue che L_A non è iniettiva. Per il teorema della dimensione ne segue che non è suriettiva.
Alternativamente, abbiamo visto che $\text{Im}L_A$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A; la riduzione di Gauss, già effettuata, ci dice che i primi due vettori colonna di A sono una base per lo spazio generato dalle colonne di A. Dato che $\text{Im}L_A$ non è tutto $\mathbb{R}^3$, essendo di dimensione 2, ne segue L_A non è suriettiva. Quindi L_A non è bigettiva.