Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 7/11/13 (ottavo compito)

Esercizio 1. Si consideri il sistema omogeneo di 3 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che trattasi di un sistema omogeneo a scala $S\underline{x} = \underline{0}$.
Determinare i pivots della matrice S. Determinare le variabili dipendenti del sistema e quelle libere. Risolvere il sistema. Sia Σ_0 l'insieme delle soluzioni. Spiegare perché Σ_0 è un sottospazio di $\mathbb{R}^6$. Determinare $k \in \mathbb{N}$ e k vettori $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$ in $\mathbb{R}^6$ in modo tale che

$$\Sigma_0 = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$$

Determinare una base per Σ_0.
Determinare il rango di S. Determinare una base per ImS.

Si consideri ora il sistema non-omogeneo di 3 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_5 - x_6 = 2 \end{cases}$$

Osserviamo che trattasi di un sistema a scala $S\underline{x} = \underline{c}$. Sia Σ l'insieme delle soluzioni.
Determinare $k \in \mathbb{N}$ e $k+1$ vettori $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k, \underline{v}_0\}$ in $\mathbb{R}^6$ in modo tale che

$$\Sigma = \underline{v}_0 + \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k)$$

Confrontare Σ e Σ_0.

Esercizio 2. Si consideri il sistema *omogeneo* di 4 equazioni in 5 incognite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Sia Σ_0 l'insieme delle soluzioni. Esprimere Σ_0 come nucleo di un'applicazione lineare L_A.
Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema omogeneo *a scala*, $S\underline{x} = \underline{0}$, equivalente al sistema dato.
Determinare $k \in \mathbb{N}$ e k vettori in $\mathbb{R}^5$ in modo tale che $\Sigma_0 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$.
Determinare una base di Σ_0.

Esercizio 3. Si consideri il sistema non-omogeneo di 4 equazioni in 5 incognite (ottenuto dal sistema omogeneo dell'esercizio precedente)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

3.0 Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema *a scala*, $S\underline{x} = \underline{c}$, equivalente al sistema dato.
3.1 Verificare che il sistema a scala $S\underline{x} = \underline{c}$ è compatibile. (Otteniamo quindi la compatibiltà del sistema iniziale.)

3.2 Sia Σ l'insieme delle soluzioni del sistema iniziale. Scrivere Σ nella forma

$$\Sigma = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_\ell) + \underline{v}_0$$

per un opportuno $\ell \in \mathbb{N}$ e per opportuni vettori $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_\ell, \underline{v}_0$ in $\mathbb{R}^5$. (*Suggerimento*: utilizzare l'esercizio precedente ....)

Esercizio 4. Determinare una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^5$:

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$$