Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 31/10/13 (settimo compito)

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}\,, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Utilizzando esclusivamente il teorema della dimensione determinare la dimensione di U, di W e decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Esercizio 2. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Scrivere l'espressione di L_A: $L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \ldots.$ Stabilire se L_A è iniettiva. Stabilire se L_A è surgettiva. Giustificare. Determinare l'immagine tramite L_A del vettore $(1, 2, 1)$. Determinare l'immagine tramite L_A dei vettori della base canonica.

Esercizio 3. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Scrivere l'espressione di L_A, come nell'esercizio precedente. Determinare la dimensione del nucleo di L_A. Determinare una base per lo spazio immagine.

Esercizio 4. Spiegare perché esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1, 1, 1) = (2, 3, 2), \quad F(0, 1, 1) = (1, 3, 2), \quad F(0, 1, -1) = (1, 1, -2).$$

(Per ragioni tipografiche scriveremo spesso i vettori di $\mathbb{R}^n$ per righe.) Determinare l'immagine tramite F degli elementi della base canonica: $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\underline{e}_3 = (0, 0, 1)$. (*Suggerimento*: esprimere i vettori della base canonica come combinazioni lineari dei vettori $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$ e applicare la linearità.)

Esercizio 5. Sia $W \subset \mathbb{R}^5$ il sottospazio $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 + x_3 + x_5 = 0\}$. Determinare un sottospazio U di $\mathbb{R}^5$ tale che $W \oplus U = \mathbb{R}^5$. (Determinare U vuol dire qui dare U tramite una sua base.) Determinare un secondo sottospazio U' distinto da U ma tale che sia ancora $\mathbb{R}^5 = W \oplus U'$.
Suggerimenti: qual è la dimensione di W ? Che dimensione ci aspettiamo per U?

Osservazione preliminare all'esercizio 6. Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e se W è un secondo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$, allora $U \cap W$, che sappiamo essere un sottospazio, è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ con $C = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$.

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^4$ sono dati $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, A\underline{x} = \underline{0}\}$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, B\underline{x} = \underline{0}\}$ con $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Verificare se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Esercizio 7. Siano V e W due spazi vettoriali e $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $n = \dim V$ e $m = \dim W$.
7.1 Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n > m$ l'applicazione lineare T non può essere iniettiva.
7.2. Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n < m$ l'applicazione lineare T non può essere suriettiva.
Giustificate la vostra risposta.