Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 31/10/13 (settimo compito).
SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1. Sappiamo che se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ allora $n = \dim \operatorname{Ker} A + \mathrm{rg} A$, dove il nucleo di A,

$$\operatorname{Ker} A \equiv \operatorname{Ker} L_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid L_A \underline{x} = \underline{0}\},$$

altri non è che *il sottospazio* di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare *omogeneo* $A\underline{x} = \underline{0}$. Questo vuol dire che $\dim \operatorname{Ker} A = n - \mathrm{rgA}$. In parole, *la dimensione del sottospazio di* $\mathbb{R}^n$ *costituito dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo* $A\underline{x} = \underline{0}$ *è data dal numero delle incognite meno il rango della matrice dei coefficienti del sistema.* Vi ricordo (libro di testo, Def 5.3 + Es 5.12) che il rango di A è il rango di L_A, e cioè, per definizione, la dimensione dell'immagine di L_A. Nel nostro caso U è l'insieme delle soluzioni di un sistema di **1** equazione in **3** incognite: $U = \operatorname{Ker} A$ con $A = |1\ -1\ -1| \in M_{13}(\mathbb{R})$. Ma allora $\dim U = 3 - \mathrm{rg} A$. Ma $\mathrm{rgA} = 1$: infatti, in generale, $\mathrm{rg} A$ è la dimensione di $\operatorname{Im} L_A$; ora, l'immagine di L_A è costituita dallo span delle colonne di A perché la j-ma colonna di A è proprio $L(\underline{e}_j)$ e sappiamo che $\operatorname{Im} L_A$ è uguale allo span dei $L_A(\underline{e}_j)$ (Lemma 5.6 + Esempio 5.12). Quindi, nel nostro caso $\mathrm{rg} A \leq 3$; d'altra parte $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ e sappiamo che in $\mathbb{R}$ c' è al più 1 vettore linearmente indipendente; dato che la prima colonna è linearmente indipendente perché non-nulla concludiamo che $\mathrm{rg} A = 1$ Quindi, tornando all'esercizio, si ha $\dim U = 3 - 1 = 2$. Conclusione: $\dim U = 2$. Analogamente $\dim W = 2$. Ma allora, per Grassmann,

$$\dim(U \cap W) = 2 + 2 - \dim(U + W) = 4 - \dim(U + W)\,.$$

Ora, $U + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ed ha quindi dimensione ≤ 3. Ma allora $\dim(U \cap W) \geq 1$. In ogni caso $(U \cap W) \neq \underline{0}$ e $\mathbb{R}^3$ non è somma diretta.

Osservazione. Ovviamente avremmo potuto considerare l'intersezione di U e di W che è costituita dai vettori $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano sia $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ che $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$; $U \cap W$ è quindi uguale al sottospazio delle soluzioni del sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso, per capire l'insieme delle soluzioni di questo sistema omogeneo, possiamo utilizzare il teorema della dimensione. Più precisamente: sapendo che $U \cap W$ è dato dalle soluzioni di (1), avremmo potuto subito concludere che $\dim(U \cap W) = 1$. Vediamo i dettagli:
sappiamo dal teorema della dimensione che

$$\dim(U \cap W) = 3 - \mathrm{rg} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ma la matrice A in questa formula ha rango 2. Vediamolo: $\mathrm{rg} A$ è la dimensione di $\operatorname{Im} L_A$; l'immagine di L_A è costituita dallo span delle colonne di A (perché la j-ma colonna di A è proprio $L(\underline{e}_j)$ e sappiamo che $\operatorname{Im} L_A$ è uguale allo span dei $L_A(\underline{e}_j)$ (Lemma 5.6 + Esempio 5.12)). Quindi, nel nostro caso $\mathrm{rg} A \leq 3$; d'altra parte $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e sappiamo che in $\mathbb{R}^2$ ci sono al più 2 vettori linearmente indipendenti; dato che le prime due colonne sono linearmente indipendenti perché non-proporzionali concludiamo che $\mathrm{rg} A = 2$. Conclusione: $\dim(U \cap W) = 3 - 2 = 1$.

Soluzione esercizio 2.

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{vmatrix}$$

L_A è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} L_A = \{\underline{0}\}$. Occorre allora calcolare

$$\operatorname{Ker} L_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid L_A\underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \}$$

Utilizzando Gauss è facile vedere che $\operatorname{Ker} L_A = \{\underline{0}\}$. Ne segue che L_A è iniettiva. Per il teorema della dimensione (andiamo da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$) è anche suriettiva. Ne segue che L_A è biettiva. L'immagine di $(1, 2, 1)$ è data sostituendo nella definizione di L_A,

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{vmatrix},$$

i valori 1,2 e 1 al posto di x_1, x_2 e x_3 rispettivamente. Otteniamo il vettore $(6, 3, 0)$. L'immagine del j-mo vettore della base canonica è la j-ma colonna della matrice A.

Soluzione esercizio 3.

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}$$

Per determinare la dimensione del nucleo troviamo prima una base per lo spazio immagine (in ogni caso questo è un quesito al quale dobbiamo rispondere). Sulla base delle soluzioni degli esercizi precedenti dobbiamo quindi determinare una base per lo spazio generato dalle colonne di A; il numero di elementi in questa base è per definizione la dimensione di $\operatorname{Im} L_A$ e si ha $\dim \operatorname{Ker} A = 3 - \dim \operatorname{Im} L_A \equiv 3 - \operatorname{rg} A$. Ora, le prime due colonne sono ovviamente linearmente indipendenti perché non-proporzionali. Dobbiamo quindi decidere se tutte e tre le colonne sono o meno linearmente indipendenti. Questo lo sappiamo fare perché il problema si riduce ad un sistema di 3 equazioni nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; si scopre che il sistema ha soluzioni non banali e quindi i 3 vettori non sono linearmente indipendenti. Ne segue che una base di $\operatorname{Im} L_A$ è costituita dalle prime due colonne. In particolare $\dim \operatorname{Im} L_A = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} L_A = 3 - 2 = 1$.

Soluzione esercizio 4. Basta verificare che i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \underline{v}_2 = (0, 1, 1), \quad \underline{v}_3(0, 1, -1)$$

sono una base di $\mathbb{R}^3$ perché allora possiamo applicare la Proposizione 5.2 del libro di Abate-de Fabritiis. Si verifica con il solito metodo già visto varie volte che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Sono quindi una base in $\mathbb{R}^3$.

Per determinare $F(1, 0, 0)$, $F(0, 1, 0)$, $F(0, 0, 1)$ dobbiamo espimere i vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in funzione di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ e poi applicare la linearità. Si ha $(1, 0, 0) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$, $(0, 1, 0) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$, $(0, 0, 1) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 - \underline{v}_3)$ e quindi

$$F(1, 0, 0) = F(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = F(\underline{v}_1) - F(\underline{v}_2) = (2, 3, 2) - (1, 3, 2) = (1, 0, 0)$$

$$F(0, 1, 0) = F(\frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)) = \frac{1}{2}((1, 3, 2) + (1, 1, -2)) = (1, 2, 0)$$

$$F(0,0,1) = F(\frac{1}{2}(\underline{v}_2\underline{v}_3)) = \frac{1}{2}((1,3,2)-(1,1,-2)) = (0,1,2)$$

Soluzione esercizio 5. W ha dimensione $5-1=4$. Sia $\underline{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^5$ non appartenente a W; basta prendere un vettore che non soddisfa l'equazione che definisce W, ad esempio $\underline{u} = (1,1,1,1,1)$. Allora $\mathrm{Span}(\underline{u}) = \{(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1 ed ha intersezione banale con W: $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Per Grassmann $\dim(U+W) = 4+1-0 = 5$; ma allora $U + W = \mathbb{R}^5$. Conclusione $\mathbb{R}^5 = W \oplus U$. Se scegliamo $U' = \mathrm{Span}(\underline{u}')$ con $\underline{u}' \notin W$ e $\underline{u}' \neq \underline{u}$ allora $\mathbb{R}^5 = W \oplus U'$ ma $U \neq U'$.

Soluzione esercizio 6. Innanzitutto osserviamo che $\mathrm{rgA} = \mathrm{rgB} = 2$. Infatti il rango di A (ad esempio) è la dimensione di $\mathrm{Im}\, L_A$ che è lo span delle colonne di A. Ora, le colonne di A sono in $\mathbb{R}^2$ e sappiamo che in $\mathbb{R}^2$ ci sono al più due vettori linearmente indipendenti; quindi $\mathrm{rgA} \leq 2$; dato che le prime due colonne di A sono non-proporzionali concludiamo che $\mathrm{rgA} = 2$. Analogamente $\mathrm{rgB} = 2$. Quindi, per il teorema della dimensione, $\dim U = \dim W = 4-2 = 2$. L'intersezione ha dimensione $4 - \mathrm{rg}C$ con C uguale alla matrice 4×4 ottenuta considerando $\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$. Applicando Gauss vediamo che C è non-singolare e quindi $\mathrm{rg}C = 4$. Ne segue che $U \cap W = \{\underline{0}\}$; per Grassmann $\dim(U+W) = 4$. Ne segue che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$

Soluzione esercizio 7. Per ipotesi $n = \dim V$ e $m = \dim W$. La **7.1** è vera, infatti, per il teorema della dimensione $\dim \mathrm{Ker}\, T = n - \dim \mathrm{Im} T$. Dato che $\mathrm{Im} T \subset W$, si ha $\dim \mathrm{Im} T \leq m$; per ipotesi $n - m > 0$, e quindi $n - \dim \mathrm{Im} T > 0$. Conclusione: $\dim \mathrm{Ker}\, T > 0$ e T non può essere iniettiva. La **7.2** è anche vera, infatti, sempre per il teorema della dimensione $\dim \mathrm{Im}\, T = n - \dim \mathrm{Ker}\, T$. Dato che $\dim \mathrm{Ker}\, T \geq 0$ si ha che $\dim \mathrm{Im}\, T \leq n$ ed essendo per ipotesi $n < m$ ne segue che $\dim \mathrm{Im}\, T < m$ e quindi T non può essere suriettiva.