Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 25/10/13 (sesto compito)

Esercizio 1. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j. Una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j.
1.1. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio.
1.2. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.
1.3 Nel caso $n = 3$ determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.
Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.
Esercizio 3. Vero o Falso :

- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
- 6 vettori in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.
Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 1, 0)\,,\ \underline{v}_2 = (0, 1, 0, 0)\,,\ \underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0).$$

Si può verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:
$W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 74\underline{v}_2 - \sqrt{2}\underline{v}_3)$
$W_2 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$
$W_3 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2, \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2)$
Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}\,, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.
Esercizio 6. Come l'esercizio precedente ma con $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ e $W = \mathrm{Span}((1, 1, 1))$.
Esercizio 7. Con le notazioni dell'esercizio 1, verificare che

$$M_{33}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_{33}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}).$$

(Utilizzare l'esercizio **1.3.**)