Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 25/10/13 (sesto compito).
SOLUZIONI.

Soluzione esercizio 1. Siano A e B due matrici simmetriche e λ un numero reale. Dobbiamo mostrare che anche $A+B$ e λA sono matrici antisimmetriche. Ricordiamo che se A è una matrice allora $(A)_{ij}$ è il coefficiente della matrice che si trova sulla i-ma riga e la j-ma colonna.
Si ha

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = (A+B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} = \lambda \cdot a_{ji} = (\lambda A)_{ji}$$

dunque $A+B, \lambda A \in \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$.

La dimostrazione per lo spazio delle matrici antisimmetriche è perfettamente analoga: se A e B sono due matrici anti simmetriche e λ un numero reale, allora

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = -a_{ji} - b_{ji} = -(A+B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} = -\lambda \cdot a_{ji} = -(\lambda A)_{ji}$$

dunque $A+B, \lambda A \in \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$.

Una base di $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ è data dalle 6 matrici

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}$$

Una base di di $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ è invece data dalle 3 matrici

$$\begin{vmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{vmatrix},$$

Notiamo che queste 9 matrici tutte insieme formano un insieme di generatori di $M_{33}(\mathbb{R})$ (verificatelo). Quindi $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}) = M_{33}(\mathbb{R})$. Dato che poi si ha anche (molto facile) $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}) = \underline{0}$ (a destra c'è la matrice nulla) concludiamo che

$$\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}) = M_{33}(\mathbb{R})$$

con il che abbiamo anche risolto l'esercizio 7.

Soluzione esercizio 2. Si tratta di 3 vettori in $\mathbb{R}^3$. per mostrare che sono una base basta mostrare che sono linearmente indipendenti. L'equazione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 = 0$$

è equivalemte al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Osserviamo che avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$. Applichiamo l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \end{array}\right|$$

Tutti i pivot sono diversi da zero. la matrice del sistema è pertanto non singolare, ed il sistema ammette un' unica soluzione. Trattandosi di un sistema omogeneo, quest'unica soluzione deve essere la soluzione banale.

Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \underline{v}_3$ significa determinare i tre numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per i quali risulta

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 = \underline{e}_2$$

Arriviamo così al sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Osserviamo che anche in questo caso avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ ed $\underline{e}_2$. Applicando l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema troviamo:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & -7/5 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right|$$

Le coordinate di $\underline{e}_2$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \underline{v}_3$ sono pertanto $(-1/3, -2/3, -7/3)$; vale a dire

$$\underline{e}_2 = -\frac{1}{3}\underline{v}_1 - \frac{2}{3}\underline{v}_2 - \frac{7}{3}\underline{v}_3$$

Soluzione esercizio 3. La prima affermazione è falsa. Per dimostrarlo dobbiamo mostrare che in $\mathbb{R}^6$ è possibile trovare quattro vettori linearmente indipendenti. Un modo è il seguente.
Sappiamo che $\mathbb{R}^6$ ha dimensione 6. Una sua base $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4, \underline{b}_5, \underline{b}_6\}$ è costituita da 6 vettori linearmente indipendenti tra loro. Ma allora, in particolare i 4 vettori $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ sono linearmente indipendenti.

La seconda affermazione è vera. Se avessimo in $\mathbb{R}^4$ sei vettori linearmente indipendenti, allora la dimensione di $\mathbb{R}^4$ sarebbe almeno 6, ma sappiamo che la dimensione di $\mathbb{R}^4$ è uguale a 4.

Infine, l'ultima affermazione è falsa. Per fornire un controesempio basta prendere tre vettori a piacere in $\mathbb{R}^6$ e scegliere come quarto vettore una combinazione lineare dei primi tre.

Soluzione esercizio 4. Ricordiamo un'utile notazione: se un sottoinsieme $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V, scriviamo $W \leq V$.
Verifichiamo che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti: l'equazione $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = 0$ scritta per esteso è

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

ed ha evidentemente la sola soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$. Determiniamo ora una base per i sottospazi W_1, W_2 e W_3. Osserviamo che tutti i generatori di W_1 sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, dunque $W_1 \leq \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$. D'altronde i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ appartengono a W_1 e dunque $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) \leq W_1$. Ne segue $W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$. Poiché i tre vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti, essi sono una base per il sottospazio che generano, e dunque una base di W_1 è $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Con ragionamento perfettamente analogo si prova che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di W_2. Infine, per quanto riguarda W_3 osserviamo che tutti i generatori di W_3 sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ e dunque $W_3 \leq \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. I due vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti perché non-proporzionali: quindi sono una base per $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ che pertanto ha dimensione 2. Questo ci dice che $\dim W_3 \leq 2$; pertanto in W_3 possiamo trovare al più 2 vettori linearmente indipendenti e, inoltre, se troviamo 2 vettori indipendenti in W_3 questi sono una base. Si verifica facilmente che $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ e $\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, per cui $\{\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2\}$ è una base di W_3. Osserviamo che W_3 viene ad essere un sottospazio bidimensionale di $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$, che ha dimensione 2. Ne segue $W_3 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. Questo fatto può essere dimostrato direttamente, mostrando che $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W_3$. Infatti si ha

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$
$$\underline{v}_2 = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) - \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$

Soluzione esercizio 5. L'intersezione di U e di W è costituita dai vettori $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano sia $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ che $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$; $U \cap W$ è quindi uguale al sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Possiamo risolvere esplicitamente il sistema (è un sistema non-quadrato ma non è difficile risolverlo per sostituzione); troviamo che $\mathrm{Span}((1, -2, 3)) = U \cap W$. Ne segue che $\mathbb{R}^3$ è somma di questi due sottospazi di dimensione 2, $\mathbb{R}^3 = U + W$, ma **non** è somma diretta.

Soluzione esercizio 6. Sappiamo che U ha dimensione 2. È ovvio che W ha dimensione 1. Inoltre $W = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Ma allora è subito visto che $U \cap W = \{\underline{0}\}$ (perché (α, α, α) soddisfa l'equazione che definisce U se e solo se $\alpha = 0$). Ne segue che $\dim(U \cap W) = 0$. Ma allora, per Grassmann, $\dim(U + W) = 2 + 1 - 0 = 3$. Ne segue che $U + W \subset \mathbb{R}^3$ e $\dim(U + W) = 3$; ma allora $U + W = \mathbb{R}^3$. Conclusione: in questo caso $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ perché $U + W = \mathbb{R}^3$ e $U \cap W = \{\underline{0}\}$.