Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 23/10/13 (quinto compito).
SOLUZIONI.

Soluzione esercizio 1. La matrice combinazione lineare richiesta è

$$A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 2. Dobbiamo stabilire se l'equazione $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \underline{0}$, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ammetta o meno soluzioni non banali [1]. La combinazione lineare $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$ esplicitamente è

$$\alpha_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{vmatrix}$$

pertanto l'equazione $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \underline{0}$ diventa

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ovvero è equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

E' immediato osservare che questo sistema ammette la sola soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$.

In definitiva abbiamo verificato che

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \underline{0} \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

e quindi le tre matrici A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti.

Soluzione esercizio 3. Il sottoinsieme W è un sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$. Infatti, presi $p(x), q(x)$ in W e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$(p + q)(1) = p(1) + q(1) = 0$$
$$(\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1) = 0$$

dunque $p(x) + q(x) \in W$ e $\lambda p(x) \in W$. Il sottoinsieme U, invece, non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$. Ad esempio il polinomio zero non appartiane ad U.

[1] ragionare sulla definizione stessa di dipendenza lineare; notare che a destra c'è la matrice nulla

Soluzione esercizio 4. Il polinomio $q(x)$ non appartiene a $\mathrm{Span}(p)$. Infatti se $q \in \mathrm{Span}(p)$, si avrebbe $q(x) = \lambda p(x)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, ovvero

$$x^2 + 5x^4 = \lambda(1 + x + x^2 + 5x^4)$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Ma l'uguaglianza scritta sopra è equivalente a

$$\lambda + \lambda x + (\lambda - 1)x^2 + 5(\lambda - 1)x^4 = 0$$

ovvero[2] al sistema

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \\ 5\lambda - 5 = 0 \end{cases}$$

che evidentemente non ha alcuna soluzione.

Soluzione esercizio 5. Abbiamo visto che ogni numero complesso (x, y) può essere scritto come

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0)(1, 0) + (y, 0)(0, 1)$$

Identificando $\mathbb{R}$ con il sottocampo $\{(\alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$ vediamo che $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ e quindi $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono un insieme di generatori per $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Ma $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono chiaramente linearmente indipendenti perché non-proporzionali; ne segue che sono una base. Quindi la dimensione di $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ è 2.

Soluzione esercizio 6. Sia

$$\alpha_1(c_1\underline{v}_1) + \alpha_2(c_2\underline{v}_2) + \cdots + \alpha_k(c_k\underline{v}_k) = \underline{0}$$

Ne segue, dagli assiomi, che

$$(\alpha_1 c_1)\underline{v}_1 + (\alpha_2 c_2)\underline{v}_2 + \cdots + (\alpha_k c_k)\underline{v}_k = \underline{0}$$

Per ipotesi i vettori sono linearmente indipendenti; ne segue che

$$\alpha_j c_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, k\,.$$

Ma $c_j \neq 0$ $\forall j$ e quindi deve essere $\alpha_j = 0$ $\forall j$. Ne segue la tesi.

[2] Quella scritta sopra è un'identità di polinomi e non un'equazione nella variabile x. Stiamo cioè chiedendo che il polinomio $\lambda + \lambda x + (\lambda - 1)x^2 + 5(\lambda - 1)x^4$ sia *identicamente* nullo, e non quali siano i valori di x che lo annullano.