

Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 18/10/13

Esercizio 1. Abbiamo visto in classe che ogni sistema lineare quadrato è equivalente ad un sistema triangolare superiore.

Leggere e capire la dimostrazione.

Dare la definizione di sistema lineare triangolare *inferiore*. Dimostrare che ogni sistema quadrato è equivalente ad un sistema triangolare inferiore.¹

Esercizio 2. Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare quadrato, con A matrice $n \times n$. Supponiamo che A sia *non singolare*. Verificare che il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è equivalente ad un sistema diagonale $\text{Id}_n \underline{x} = \underline{c}$ con Id_n la matrice identità:

$$\text{Id}_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

e dunque al sistema banale $\underline{x} = \underline{c}$ (che ha soluzione, ovviamente, $\underline{v} = \underline{c}$). *Suggerimento:* ridurre ad un sistema triangolare superiore e poi fare uso dell'esercizio 1.

Esercizio 3. Applicare il procedimento messo a punto nell'esercizio 2 al sistema dell'esercizio 1 del compito del 16/10/2013:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ 3x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 4. Utilizzando il metodo di Gauss, studiare il sistema di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} y - z = -1 \\ x + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Quali dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio? Giustificare le risposte.

$$W_1 = \{(x, y, z) \in V \mid z = x^2 + y^2\}.$$

$$W_2 = \{t(1, 2, 2), 0 \leq t \leq 1\}$$

$$W_3 = \{(t, 0, 0), t \neq 0\}$$

Esercizio 6. Stabilire se l'insieme \mathbb{R}^2 è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} rispetto alle operazioni:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad k(x, y) = (kx, -ky), \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

¹*Suggerimento:* utilizzare una riduzione di Gauss "a salire", partendo dall'ultima colonna.