Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3 (Prof. Paolo Piazza).
Compiti a casa del 16/10/13 e del 18/10/13.
SOLUZIONI.

Osservazione preliminare. Il metodo di eliminazione di Gauss si basa su quello che abbiamo chiamato *Lemma fondamentale* (è il Lemma 3.2 del libro di testo). Il Lemma fondamentale riguarda un sistema di equazioni lineari; esso permette di sostituire alla j-ma equazione la j-ma equazione moltiplicata per $k \neq 0$ più un'altra equazione moltiplicata per un arbitrario fattore $\ell \in \mathbb{R}$ e ottenere un sistema equivalente al sistema dato. Nel metodo di eliminazione di Gauss consideriamo sempre $k = 1$ ma è chiaro che potremmo semplificarci qualche conto considerando k arbitrario purché diverso da zero. Faccio notare sin da adesso che il metodo di Gauss con $k = 1$ permette di mantenere invariate altre proprietà importanti della matrice associata al sistema (ad esempio, nel caso quadrato, il determinante). Per la riduzione di un sistema quadrato ad un sistema triangolare superiore possiamo invece utilizzare qualsiasi $k \neq 0$.
D'ora in avanti parliamo di *Metodo di Gauss per matrici*, o brevemente *Metodo di Gauss*, se consideriamo sostituzioni con $k = 1$; utilizzeremo la dizione *Metodo di Gauss per sistemi* se ci diamo la libertà di fare sostituzioni con $k \neq 0$.

Soluzione esercizio 1 del 16/10 + esercizio 3 del 18/10.
La matrice associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

L'elemento di posto $(1, 1)$ è diverso da zero; in particolare è uguale ad 1. Possiamo utilizzare questo 1 per eliminare gli altri della prima colonna al di sotto della prima riga; questo è il primo passo del metodo di Gauss. Eseguiamo cioè la seguente operazione sulle righe:

$$\begin{aligned} \text{prima riga} &\to \text{prima riga} \\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga} - 2 \cdot \text{prima riga} \\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga} - 3 \cdot \text{prima riga} \end{aligned}$$

Otteniamo così la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

L'elemento di posto $(2, 2)$ è diverso da zero. Applichiamo il *Metodo di Gauss per sistemi*. Possiamo rendere l''elemento di posto $(2, 2)$ uguale ad 1 moltiplicando la seconda riga per $-1/3$ [1], ottenendo così la matrice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

[1] Questa operazione è contemplata dal metodo di Gauss per sistemi ma non dal Metodo di Gauss

Adesso utilizziamo l' uno nel posto $(2,2)$ per eliminare gli elementi della seconda colonna al di sotto della seconda riga:

$$\begin{aligned}\text{prima riga} &\to \text{prima riga}\\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga}\\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga} - (-9)\cdot\text{seconda riga}\end{aligned}$$

Otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2/3 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{array}\right)$$

L'elemento di posto $(3,3)$ è diverso da zero e lo possiamo rendere uguale ad uno moltiplicando la terza riga per $-1/2$. La matrice che si ottiene è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2/3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

A questo punto l'eliminazione "a scendere" è completata. I pivot sono tutti non nulli, e dunque possiamo già concludere che il sistema ammette un unica soluzione. Per determinarla esplicitamente facciamo l'eliminazione "a salire": utilizziamo l'uno in posizione (3,3) per eliminare gli elementi della terza colonna al di sopra della terza riga:

$$\begin{aligned}\text{prima riga} &\to \text{prima riga} - 3\cdot\text{terza riga}\\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga} - 2/3\cdot\text{terza riga}\\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga}\end{aligned}$$

ottenendo così la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -2/3\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Adesso utilizziamo l'uno in posizione $(2,2)$ per eliminare gli elementi della seconda colonna al di sopra della seconda riga:

$$\begin{aligned}\text{prima riga} &\to \text{prima riga} - 2\cdot\text{seconda riga}\\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga}\\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga}\end{aligned}$$

La matrice che otteniamo è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & 0 & -2/3\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Abbiamo finito: quest'ultima matrice ritradotta in un sistema ci dice

$$\begin{cases} x = -2/3\\ y = -2/3\\ z = 1\end{cases}$$

Soluzione esercizio 4 del 18/10.
La matrice del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Scambiando la seconda riga con la prima ed operando con Gauss otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e possiamo quindi concludere che il sistema è incompatibile (l'ultima equazione dà $0z = 1$ che non è mai soddisfatta).

Soluzione esercizio 5 del 18/10. Il sottoinsieme W_1 non è un sottospazio di V. Ad esempio,[2] il vettore $(1, 1, 2)$ appartiene a W_1, ma il suo opposto, ovvero il vettore $(-1, -1, -2)$ non appartiene a W_1.

Il sottoinsieme W_2 non è un sottospazio di V. Ad esempio il vettore $(1, 2, 2)$ appartiene a W_2, ma il suo doppio $2 \cdot (1, 2, 2) = (2, 4, 4)$ non appartiene a W_2.

Il sottoinsieme W_3 non è un sottospazio di V. Ad esempio il vettore nullo $(0, 0, 0)$ non appartiene a W_3.

Soluzione esercizio 6 del 18/10. Le operazioni $\{+, \cdot\}$ definite nel testo dell'esercizio non dotano $\mathbb{R}^2$ di una struttura di spazio vettoriale. Forse il modo più semplice di vederlo (ce ne sono ovviamente altri) è osservare che $1 \cdot (x, y) = (x, -y)$ e dunque, in generale

$$1 \cdot (x, y) \neq (x, y)$$

Non è dunque verificato l'assioma $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$, $\forall \underline{v} \in V$.

[2]Se un sottoinsieme $W \subseteq V$ non è un sottospazio, ci sono in generale molti modi di dimostrarlo. Quelli proposti qui sono solamente degli esempi: ce ne sono molti altri altrettanto validi.