Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3.
Soluzioni del compito a casa del 11/10/13

Soluzione esercizio 2.6 del libro di testo.
Se $\underline{v} \in \mathcal{V}_O^2$ allora per trovare $F_{\mathcal{B}}(\underline{v})$ dobbiamo esprimere $\underline{v}$ in funzione di $\underline{i}$ e $\underline{j}$,

$$\underline{v} = \alpha\underline{i} + \beta\underline{j}\,,$$

e poi porre

$$F_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$$

Si ha:

$$\underline{i} = 1\underline{i} + 0\underline{j}$$

e quindi

$$F_{\mathcal{B}}(\underline{i}) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Analogamente si procede per $F_{\mathcal{B}}(\underline{j})$.

Soluzione esercizio 2.7 del libro di testo.
È un semplice conto

$$\overline{OD_1} = (3\underline{i} + 2\underline{j}) - (2\underline{i} + \underline{j}) - 2(\underline{i} - 2\underline{j})$$

Dalle proprietà di spazio vettoriale di $\mathcal{V}_O^2$ otteniamo

$$\overline{OD_1} = (3 - 2 - 2)\underline{i} + (2 - 1 + 4)\underline{j} = -\underline{i} + 5\underline{j}$$

Quindi

$$F_{\mathcal{B}}(\overline{OD_1}) = \begin{vmatrix} -1 \\ 5 \end{vmatrix}.$$

Analogamente si procede con l'altro vettore.

Soluzione esercizio 2.8 del libro di testo.
Anche questo esercizio è molto semplice:

$$\overline{OD_1} = (\underline{i} - 4\underline{j}) + 2(-2\underline{i} - \underline{j}) + 3(\underline{i} + 2\underline{j}) = (1 - 4 + 3)\underline{i} + (-4 - 2 + 6)\underline{j} = 0\underline{i} + 0\underline{j} = \underline{0}$$

Analogamente per la seconda domanda.

Soluzione esercizio 2.9 del libro di testo.
Il vettore $\overline{OD}$ è uguale a $(6 + 2a)\underline{i} + (26 - a)\underline{j}$ e quindi è un multiplo di $\underline{j}$ se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$6 + 2a = t \cdot 0 \equiv 0 \quad \text{e} \quad 26 - a = t \cdot 1 \equiv t$$

Ciò accade se e solo se $a = -3$; per questo valore $\overline{OD} = 29\underline{j}$.

Soluzione esercizio 2.10 del libro di testo.
Del tutto analogo al precedente.

Soluzione esercizio 2.11 del libro di testo.
I due vettori sono proporzionali se e solo se [1] esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\overline{OA} = t\overline{OB}$ e quindi sse esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$2 = 2t \quad \text{e} \quad 3 = t$$

[1] se e solo se $\equiv$ sse

Un tale t non esiste (la seconda determina t che però sostituito nella prima non la soddisfa). Quindi i due vettori non sono proporzionali e possono essere presi come base di $\mathcal{V}_O^2$. Le coordinate del vettore $\overline{OC}$ rispetto a questa nuova base sono quei due numeri reali α e β tali che

$$\overline{OC} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB}$$

Riscriviamo questa uguaglianza in termini di $\underline{i}$ e $\underline{j}$:

$$\underline{i} + \underline{j} = \alpha(2\underline{i} + 3\underline{j}) + \beta(2\underline{i} + \underline{j})$$

e quindi

$$1 = 2\alpha + 2\beta \quad \text{e} \quad 1 = 3\alpha + \beta$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema di 2 equazioni nelle incognite α e β:

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 1 \\ 3\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

Ricavando β dalla seconda e sostituendolo nella prima determiniamo α; risostituendo questo valore di α nella seconda ricaviamo β (metodo di sotituzione). Svolgendo i calcoli si trova

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{4}.$$

Soluzione esercizio 2.13 del libro di testo.
Del tutto analoga a quella dell'esercizio 2.7.

Soluzione esercizio 2.15 del libro di testo.
Osserviamo che i tre vettori sono a due a due non proporzionali (se due di essi fossero stati proporzionali la conclusione sarebbe stata ovvia). I tre vettori sono complanari se e solo se esistono α e β numeri reali tali che

$$\overline{OC} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB}$$

ciò è vero sse

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

che ci dà il sistema

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}$$

Abbiamo verificato che i tre vettori sono complanari.

Soluzione esercizio 2.17 del libro di testo.
Le due rette si intersecano se e solo se esistono $t \in \mathbb{R}$ e $t' \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{vmatrix} t+1 \\ t+3 \\ 2t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t'+4 \\ 2-t' \\ t'+3 \end{vmatrix}.$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} t - t' = 3 \\ t + t' = -1 \\ 2t - t' = 4 \end{cases}$$

e ricavando t dalla seconda e sostituendola nella prima (metodo di sostituzione) otteniamo

$$t = 1\,, \quad t' = -2\,.$$

Le due rette sono dunque incidenti ed il punto di intersezione è

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 2.21 del libro di testo.
Dobbiamo verificare se esistono α e β in $\mathbb{R}$ tali che

$$\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k} = \alpha(\underline{i} - 3\underline{k}) + \beta(\underline{j} + 3\underline{k})$$

Uguagliando le coordinate omonime si vede avere

$$1 = \alpha\,, \quad 2 = \beta\,, \quad 3 = -3\alpha + 3\beta$$

Le prime due uguaglianze fissano $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ e dato che questi valori soddisfano anche la terza equazione concludiamo che $\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k} \in \pi$.
D'altra parte, per il vettore $\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$ cerchiamo α e β tali che

$$1 = \alpha\,, \quad -2 = \beta\,, \quad 3 = -3\alpha + 3\beta$$

Le prime due uguaglianza fissano α e β ma questi valori *non* soddisfano la terza equazione. Ne segue che $\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k} \notin \pi$.

Soluzione esercizio 2.28 del libro di testo.
I punti della retta r hanno coordinate

$$\begin{vmatrix} 3 + t(-1-3) \\ 0 + t(2-0) \\ 4 + t(-2-4) \end{vmatrix}$$

e cioè

$$\begin{vmatrix} 3 - 4t \\ 2t \\ 4 - 6t \end{vmatrix}$$

I punti della retta r' hanno coordinate

$$\begin{vmatrix} 2 - 2t' \\ 2 - 2t' \\ 5 - 8t' \end{vmatrix}$$

Per trovare l'intersezione delle due rette dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} 3 - 4t = 2 - 2t' \\ 2t = 2 - 2t' \\ 4 - 6t = 5 - 8t' \end{cases}$$

che ha soluzione

$$t = \frac{1}{2} = t'$$

Le due rette, quindi, si intersecano, ed il loro punto d'intersezione è

$$\left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right| .$$