Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 4/10/13

Esercizio 1. Studiare iniettività e suriettività delle seguenti applicazioni:

- $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longrightarrow x^2 - 3x + 2$
- $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$
  $x \longrightarrow \sin x$
- $f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
  $x \longrightarrow x + 1$
- $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longrightarrow 2x + 5$
- $f_5 : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$
  $n \longrightarrow 1/n$
- $f_6 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
  $x \longrightarrow 2x$

Esercizio 2. Sia $(G, \bullet)$ un gruppo. Verificare che fissato $g \in G$ l'applicazione $f_g : G \to G$, $f_g(h) = h \bullet g$ è bigettiva. Chi è la sua inversa ?

Esercizio 3. Sia $(G, \bullet)$ un gruppo. Verificare l'unicità dell'elemento neutro e dell'inverso di un elemento $g \in G$.

Esercizio 4. Verificare gli assiomi di campo per il campo complesso $\mathbb{C}$.

Esercizio 5. Sia $f : A \to B$ una biezione e sia $f^{-1} : B \to A$ l'inversa di f. Verificare che

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B\,, \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$$

dove per ogni insieme C l'applicazione id_C è l'applicazione $\mathrm{id}_C(c) := c$ per ogni $c \in C$.

Esercizio 6. Sia A un insieme e $G = \{f : A \to A \mid f \text{ è bigettiva}\}$. Sia $\circ$ la composizione fra applicazioni. Verificare che $(G, \circ)$ è un gruppo.

Esercizio 7. Sia ora $A = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Il gruppo G definito nell'esercizio 2 possiede allora una notazione specifica, che è $\mathcal{S}_n$, ed un nome specifico che è il *gruppo simmetrico di n oggetti.*
Scrivere tutti gli elementi del gruppo $\mathcal{S}_3$ (sono 6). Verificare che S_3 non è un gruppo commutativo.
Suggerimento: per scrivere, ad esempio, l'elemento di $\mathcal{S}_3$ che manda 1 in 3, 2 in 2 e 3 in 1 potete scrivere

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8 (Facoltativo). Risolvere gli esercizi 1.31 e 1.32 del libro di testo.