Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2012-13.
Prof. P. Piazza
Ulteriori esercizi di preparazione all'esame e all'esonero.

Esercizio 1. (svolto in classe il 22/1/2013) Consideriamo $\mathcal{V}^3_O$ che è uno spazio vettoriale metrico. Fissiamo una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ e consideriamo le coordinate associate. Scriviamo un vettore tramite le sue coordinate.
Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v}$ di lunghezza uguale a 2 ed ortogonali sia a $\underline{f} = (1, -1, 2)$ che a $\underline{g} = (0, 1, -1)$.
Potete utilizzare il prodotto *vettoriale*.

Sia V uno spazio vettoriale reale (o più in generale su un campo $\mathbb{K}$) e sia $F : V \to V$ un endomorfismo, $F \in \mathrm{End}(V)$; sia W un sottospazio di V. Diremo che W è *un sottospazio invariante* per F (o *rispetto a* F) se $F(W) \subseteq W$. Se W è un sottospazio invariante, possiamo definire *la restrizione* di F a W: $F|_W \in \mathrm{End}(W)$. Questa è l'applicazione lineare $W \to W$ che associa a $\underline{w} \in W$ il vettore $F(\underline{w})$ (essendo W invariante ne segue che $F(\underline{w}) \in W$). [1]

Esercizio. (molto facile). Verificare che se $\underline{v}$ è un autovettore di F allora $\mathbb{R}\underline{v}$ è una retta invariante. Verificare che, viceversa, se $r \subset V$ è una retta invariante per $F \in \mathrm{End}(V)$ allora r è generata da un autovettore per F. Verificare che ogni autospazio è un sottospazio invariante. Verificare che $\mathrm{Im}(F)$ è un sottospazio invariante.

Esercizio 2. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l' operatore lineare definito dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

(2.1) Verificare che i vettori $\underline{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\underline{v}_2 = (2, 1, -1)$ costituiscono una base di $\mathrm{Im}T$.

(2.2) *Sia W, per definizione, il sottospazio* $\mathrm{Im}(T)$: $W := \mathrm{Im}T$. Sappiamo che W è un sottospazio invariante per T. Consideriamo la restrizione di T al sottospazio invariante W. Denotiamo come al solito questa restrizione con $T|_W$. Determinare la matrice associata a $T|_W$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ di W.

(2.3) Stabilire se $T|_W : W \longrightarrow W$ è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Consideriamo nuovamente $\mathcal{V}^3_O \equiv V$, con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$.
(i) Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v} \in V$ che sono complanari a $\underline{f} = (1, -2, 0)$ e $\underline{g} = (2, 0, 1)$, hanno lunghezza uguale a $\sqrt{6}$ e sono ortogonali a $(3, -1, -1)$.
(ii) Detto $\underline{v}_1$ il vettore determinato in (i) che forma un angolo ottuso con $\underline{j}$, determinare le coordinate del vettore proiezione ortogonale di $\underline{v}_1$ su $\mathbb{R}\underline{f}$.

[1] Ad esempio, sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia R_θ è l'operatore di rotazione di un angolo $\theta \in (0, \pi)$ attorno ad un asse $\mathbb{R}\underline{v}$. R_θ è un'applicazione lineare ed è chiaro geometricamente che il piano ortogonale a $\mathbb{R}\underline{v}$, e cioè il piano vettoriale $W = (\mathbb{R}\underline{v})^\perp$, è invariante per R_θ. Fate una figura nel caso $\underline{v} = (0, 0, 1)$. La restrizione di R_θ a questo piano invariante W è l'operatore di rotazione di un angolo θ in W. Notate che in questo caso il piano $(\mathbb{R}\underline{v})^\perp$ è invariante per R_θ ma in $(\mathbb{R}\underline{v})^\perp$ non ci sono rette invarianti o, equivalentemente, non ci sono autovettori. Fate una figura e convincetevi di tutto ciò ragionando geometricamente. In particolare, la restrizione di R_θ a $(\mathbb{R}\underline{v})^\perp$ non è diagonalizzabile.

Esercizio 4. (parzialmente risolto in classe il 22/1/2013) Sia

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

4.1 Dimostrare che l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da A è diagonalizzabile.
4.2 Determinare una matrice B tale che $\Delta := B^{-1}AB$ sia diagonale.
4.3 Calcolare A^{1223}.
Suggerimento: Δ^{1223} è facilmente calcolabile. Come sono collegati A^{1123} e Δ^{1223} ? Utilizzare **4.2**.

Esercizio 5 (risolto in classe il 24/1/13). Due delle matrici

$$A_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 5/2 & 1/8 \\ 2 & 5/2 \end{vmatrix}$$

$$A_5 = \begin{vmatrix} 3/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

sono *simili*[2]: dire quali e giustificare la risposta.
Suggerimento: utilizzare il polinomio caratteristico.

Esercizio 6. Dimostrare la seguente:
Proposizione. Sia $F : V \to V$ lineare e siano $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ gli autovalori distinti di F. Allora

$$V_{\lambda_1}(F) + \cdots + V_{\lambda_k}(F) = V_{\lambda_1}(F) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}(F).$$

Suggerimento: basta verificare che la decomposizione è unica....
Utilizzate l'Oss. 13.6

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $F : V \to V$ lineare. Facciamo le seguenti ipotesi su F:
(i) Le radici di $P_F(T)$ sono 1 e 0 con $m_a(0) = k$ e $m_a(1) = n - k$.
(ii) $m_g(0) = m_a(0)$ e $m_g(1) = m_a(1)$.
Dimostrare che sotto queste ipotesi F è l'operatore di proiezione su $V_1(F)$ parallelamente a $V_0(F) = \mathrm{Ker}(F)$.

Verificare che se invece: (i) le radici di $P_F(T)$ sono 1 e (-1) con $m_a(1) = k$ e $m_a(-1) = n - k$. (ii) $m_g(1) = m_a(1)$, $m_g(-1) = m_a(-1)$ *allora* F è la simmetria rispetto a $V_1(F)$ parallelamente a $V_{(-1)}(F)$.

---

[2] vi ricordo che due matrici A e A' sono simili se esiste una matrice invertibile B tale che $A' = B^{-1}AB$. Osservazione: se A e A' sono simili e se A' e A'' sono simili allora A e A'' sono anche simili:

$$A'' = C^{-1}A'C = C^{-1}B^{-1}ABC = (BC)^{-1}A(BC)$$