

Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2012-13.
Prof. P. Piazza

Soluzione per gli ulteriori esercizi dipreparazione all'esame e all'esonero

Soluzione Esercizio 1. Il vettore $\underline{f} \wedge \underline{g}$ è un vettore che è ortogonale sia ad \underline{f} che a \underline{g} . Dalla definizione di prodotto vettoriale otteniamo immediatamente le coordinate di $\underline{f} \wedge \underline{g}$ che sono $(-1, 1, 1)$. I vettori $\lambda(-1, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sono allora tutti ortogonali sia ad \underline{f} che a \underline{g} . Basta allora determinare i λ tali che $|(-\lambda, \lambda, \lambda)| = 2$ e cioè tali che $\sqrt{(-\lambda)^2 + (\lambda)^2 + (\lambda)^2} = 2$. Si trova $\sqrt{3}\lambda^2 = 2$, $3\lambda^2 = 4$, $\lambda = \pm 2/\sqrt{3}$. Conclusione: i vettori cercati sono $\{2/\sqrt{3}(-1, 1, 1), -2/\sqrt{3}(-1, 1, 1)\}$.

Soluzione esercizio 2.

(2.1) Sia A la matrice che definisce T . È subito visto che A ha rango 2 e quindi $\text{Im}(T)$ ha dimensione 2. Notiamo poi che \underline{v}_1 è la somma delle prime due colonne di A e che \underline{v}_2 è la somma della seconda e terza colonna di A . Ne segue che $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \text{Im}(T)$; essendo non paralleli ne segue che sono una base di $\text{Im}(T)$.

(2.2) Sia $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ la fissata base di $\text{Im}(T)$. Per semplificare la notazione, poniamo $T|_W = T'$; sia A' la matrice associata a T' nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Per determinare A' basta esprimere

$$T'\underline{v}_1 = \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 \quad T'\underline{v}_2 = \gamma\underline{v}_1 + \delta\underline{v}_2$$

perché allora, per definizione di matrice associata ad un endomorfismo in una fissata base, si avrà:

$$A' = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$$

Si ha

$$T'\underline{v}_1 = T\underline{v}_1 = A\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

e, analogamente, $T'\underline{v}_2 = (1, 3, 2)$. Rimane quindi da esprimere $(2, 3, 1)$ e $(1, 3, 2)$ in funzione di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$: impostando i due semplici sistemi

$$\begin{cases} 2 = \alpha + 2\beta \\ 3 = 2\alpha + \beta \\ 1 = \alpha - \beta \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = \gamma + 2\delta \\ 3 = 2\gamma + \delta \\ 2 = \gamma - \delta \end{cases}$$

e risolvendo in α, β e γ, δ si trova

$$A' = \begin{vmatrix} 4/3 & 5/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{vmatrix}$$

(2.3) Calcolando il polinomio caratteristico $\det(A' - \lambda \text{Id})$ si verifica che T' ha gli autovalori *reali* e *distinti* ed è quindi diagonalizzabile.

Risposte per l'esercizio 3.

(i) $\underline{v} = (-1, -2, -1)$, $\underline{w} = (1, 2, 1)$.

(ii) Il vettore \underline{v}_1 è $(-1, -2, -1)$ e la sua proiezione ortogonale su \underline{f} è $(3/5, -6/5, 0)$.

Soluzione esercizio 4. Calcolando il polinomio caratteristico si scopre che F_A ammette gli autovalori reali $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica rispettivamente

2 e 2. Si ha poi

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}\}, \quad V_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}\}.$$

Questi autospazi hanno entrambi dimensione 2. Per il criterio di diagonalizzabilità¹ ne segue che F_A è diagonalizzabile.

Passiamo a **4.2**: per quanto appena visto, la matrice associata ad F_A in una base di autovettori è uguale alla matrice diagonale

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dato che

$$V_1 = \text{Span}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)), \quad V_0 = \text{Span}((1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0)),$$

vediamo che una base di autovettori è data da

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 0, 1), \quad \underline{v}_2 = (0, 1, 1, 0), \quad \underline{v}_3 = (1, 0, 0, -1), \quad \underline{v}_4 = (0, 1, -1, 0)$$

Sia B la matrice che ha come colonne le coordinate degli autovettori nella base canonica:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Sappiamo, dalla teoria, che

$$\Delta = B^{-1}AB$$

Dato che Δ è diagonale abbiamo risposto a **4.2**.

Consideriamo ora **4.3**: sappiamo che $\Delta = B^{-1}AB$ e ne segue quindi, moltiplicando a destra per B e a sinistra per B^{-1} che $A = B\Delta B^{-1}$ e quindi, in definitiva,

$$A^{1224} = (B\Delta B^{-1})^{1224} = B\Delta^{1223}B^{-1} = B\Delta B^{-1} = A$$

dove abbiamo ovviamente utilizzato ripetutamente il fatto che $BB^{-1} = B^{-1}B = I$ ed il fatto che, in questo caso particolare, $\Delta^k = \Delta \forall k \in \mathbb{N}$.

Soluzione esercizio 5. Abbiamo dimostrato a lezione che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico; ciò implica, ovviamente, che se due matrici hanno polinomi caratteristici diversi, allora non sono simili. Ne segue, calcolando tali polinomi caratteristici, che le uniche matrici che *possono* essere simili sono A_2 e A_4 . Si ha $P_{A_2}(\lambda) = P_{A_4}(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ che ha radici *distinte* $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Quindi A_2 è simile alla matrice diagonale Δ con

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix};$$

A_4 è anche simile alla matrice Δ e quindi A_2 è simile ad A_4 , come volevasi.

Soluzione esercizio 6. Omessa (facile conseguenza dell'oss. 13.6)

Soluzione esercizio 7. Dalle ipotesi fatte segue subito che $V_1(F) + V_0(F) = V_1(F) \oplus V_0(F) = V$. *Infatti*: la prima uguaglianza, $V_1(F) + V_0(F) = V_1(F) \oplus V_0(F)$, è un fatto generale (vedi esercizio precedente). La seconda segue subito dalle due

¹(i) radici del polinomio caratteristico reali; (ii) molteplicità algebrica=molteplicità geometrica.

ipotesi e dal fatto che $\dim(U \oplus U') = \dim U + \dim U'$ (che è una conseguenza della formula di Grassmann). Ma allora $\forall \underline{w} \in V$ esiste un'unica decomposizione $\underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in V_1(F)$, $\underline{w}_2 \in V_0(F)$ e dalla linearità e dalla definizione di autospazio si ha

$$F(\underline{w}) \equiv F(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = F(\underline{w}_1) + F(\underline{w}_2) = 1\underline{w}_1 + 0\underline{w}_2 = \underline{w}_1 + \underline{0} = \underline{w}_1.$$

Ma allora F è la proiezione su $V_1(F)$ parallelamente a $V_0(F)$ che è quello che dovevamo dimostrare.

Analogamente se:

(i) le radici di $P_F(T)$ sono 1 e (-1) con $m_a(1) = k$ e $m_a(-1) = n - k$.

(ii) $m_g(1) = m_a(1)$, $m_g(-1) = m_a(-1)$

allora $V = V_1(F) \oplus V_{(-1)}(F)$ e quindi, utilizzando la linearità e la definizione di autospazio vediamo che F è la simmetria rispetto a $V_1(F)$ parallelamente a $V_{(-1)}(F)$.