Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2012-13. Canale L-PE.
Prof. P. Piazza
Esercizi su autovalori ed autovettori

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.1. Determinare gli autovalori di F_A.
1.2. Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.
1.3. Per ogni autospazio determinare una base.
1.4. Verificare che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per F_A. Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?
1.5. Scrivere la matrice associata a F_A nella base di cui in 1.4. (Utilizzate la definizione di matrice associata ad F_A in una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$; vi ricordo che questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $F_A(\underline{v}_j)$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.)
1.6 Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}\, A\, M$ sia diagonale.

Esercizio 2. Rifare l'Esercizio 1 ma per l'operatore $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 3. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ fissata. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione *lineare* che ammette il sottospazio $\mathbb{R}(1,1)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = -2$ e il sottospazio $\mathbb{R}(-1,0)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda_2 = 3$.
(3.1) Spiegare perché F è univocamente determinata dalle condizioni date.
(3.2) Determinare la matrice associata ad F nella base canonica.

Esercizio 4. Sia $F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

4.1 Verificare che F_A non è diagonalizzabile.
4.2 Sia ora $F_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'applicazione lineare definita su $\mathbb{C}^2$ da A:

$$F_A^{\mathbb{C}} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}$$

(stessa definizione di F_A ma su $\mathbb{C}^2$); studiare la diagonalizzabilità di $F_A^{\mathbb{C}}$.

Esercizio 5. Sia

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e sia $T := L_A$
Stabilire se T è diagonalizzabile.