Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2012-13. Canale L-PE
Prof. P. Piazza
Soluzione compito a casa del 11/01/13 (tredicesimo compito)

Esercizio 1. *Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice:*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.1. *Determinare gli autovalori di F_A.*

Soluzione 1.1. Abbiamo visto che gli autovalori di F_A sono le radici del polinomio caratteristico $P_{F_A}(\lambda)$. La matrice associata a F_A nella base canonica è proprio A e quindi $P_{F_A}(\lambda) = P_A(\lambda)$ con

$$P_A(\lambda) = det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

Calcolando il determinante otteniamo: $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda)$. Ne segue che F_A ha autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2\,, \lambda_3 = 4$.

1.2. *Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.*

Soluzione 1.2. Vi ricordo che

$$V_\lambda = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, F_A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} \equiv \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,; (A - \lambda \mathrm{I}_3)\underline{x} = \underline{0}\}.$$

Quindi $V_0 = \{\underline{x}\,;\, A\underline{x} = \underline{0}\} = \mathrm{Ker}F_A$; questo sottospazio sappiamo già calcolarlo ed otteniamo

$$V_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \}$$

Passiamo a V_2; la matrice $A - 2\mathrm{I}_3$ è data da

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$V_2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\,; \begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \}$$

Procedendo analogamente si trova:

$$V_4 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \}$$

1.3. *Per ogni autospazio determinare una base.*

Soluzione 1.3. In questo caso ogni autospazio è una retta (ognuno dei 3 sistemi è un sistema lineare omogeneo di 2 equazioni in 3 incognite e di rango 2). Risolvendo i sistemi si trova

$$V_0 = \mathbb{R}(0,-3,1)\,, \quad V_2 = \mathbb{R}(4,9,3)\,, \quad V_4 = \mathbb{R}(0,1,1)\,.$$

1.4. *Verificare che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per F_A. Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?*

Soluzione 1.4. I vettori generatori dei 3 autospazi sono linearmente indipendenti; si può far uso della Proposizione che afferma che *autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti*; qui gli autovalori sono certamente distinti e possiamo concludere. Quindi *una* base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F_A è

$$\underline{v}_1 = (0,-3,1)\,, \quad \underline{v}_2 = (4,9,3)\,, \quad \underline{v}_3 = (0,1,1)$$

Questa base **non** è ovviamente unica; possiamo scegliere 3 generatori diversi nelle 3 rette di autovettori V_0, V_2, V_4 e ottenere così una diversa base di autovettori. Ad esempio

$$\underline{w}_1 = (0,6,-2)\,, \quad \underline{w}_2 = (4\pi, 9\pi, 3\pi)\,, \quad \underline{w}_3 = (0, \sqrt{39}, \sqrt{39})\,.$$

1.5. *Scrivere la matrice associata a F_A nella base di cui in 1.4. (Utilizzate la definizione di matrice associata ad F_A in una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$; vi ricordo che questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $F_A(\underline{v}_j)$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.)*

Soluzione 1.5. Come spiegato in dettaglio a lezione la matrice associata ad F_A in una base di autovettori è proprio la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di F_A (nell'ordine dato dall'ordine degli autovettori). In questo caso, per la base

$$\underline{v}_1 = (0,-3,1) \in V_0\,, \quad \underline{v}_2 = (4,9,3) \in V_2\,, \quad \underline{v}_3 = (0,1,1) \in V_4$$

otteniamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

1.6 *Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}\,A\,M$ sia diagonale.*

Soluzione 1.6. Abbiamo a questo punto due basi di $\mathbb{R}^3$; la base canonica e la base di autovettori

$$\underline{v}_1 = (0,-3,1)\,, \quad \underline{v}_2 = (4,9,3)\,, \quad \underline{v}_3 = (0,1,1)$$

Sia M la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{v}_j$ nella base canonica:

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Questa è la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base di autovettori.

Sappiamo che la matrice B associata a F_A nella nuova base è data da

$$B = M^{-1}AM$$

D'altra parte abbiamo già calcolato questa matrice utilizzando l'informazione che la base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di autovettori ed abbiamo trovato

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

In definitiva, la matrice M è tale che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

come si voleva.

Esercizio 2. *Rifare l'Esercizio 1 ma per l'operatore $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice*

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Soluzione Esercizio 2. Il polinomio caratteristico di F_A è $P_{F_A}(\lambda) \equiv P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$ che ha ovviamente radici $\lambda_1 = 1$ *con molteplicità algebrica 2* e $\lambda_2 = 1$. Gli autospazi sono

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$$

e

$$V_{-1} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \}$$

Quindi

$$V_1 = \mathrm{Span}((1,0,-1),(2,1,0))\,, \quad V_{-1} = \mathbb{R}(1,0,1)\,.$$

Questi 3 vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per F_A. La matrice associata a F_A nella base di autovettori è la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

La matrice M che ha come colonne le coordinate, nella base canonica, degli autovettori, e cioè la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ha la proprietà che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Soluzione esercizio 3. Per definizione

$$F(1,1) = -2(1,1) = (-2,-2)\,, \qquad F(-1,0) = 3(-1,0) = (-3,0)\,.$$

F è allora univocamente determinata dalle condizioni date perché è lineare e perché è nota sui vettori $\underline{v}_1 = (1,1)$ e $\underline{v}_2 = (-1,0)$ che sono una base di $\mathbb{R}^2$. Per definizione risulta

$$F\underline{v}_1 = -2\underline{v}_1 = -2\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2\,, \quad F\underline{v}_2 = 3\underline{v}_2 = 0\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2\,;$$

ne segue che la matrice associata ad F nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è la matrice diagonale

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Soluzione classica, con schemino.
Schematicamente:
$$A \text{ associata a } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}\,.$$
Vogliamo trovare
$$B \text{ associata a } \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}\,.$$
Sia M la matrice che ha come colonne le coordinate della base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$: quindi
$$\left|\begin{array}{cc} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{array}\right| M$$
Sappiamo che
$$B = M^{-1}AM$$
Noi non conosciamo M ma conosciamo M^{-1} perché conosciamo la matrice M' tale che
$$\left|\begin{array}{cc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \end{array}\right| M'\,,$$
(infatti $M' = \left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right|$) e sappiamo che $M' = M^{-1}$, da cui
$$M = (M')^{-1} = \left(\left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right|\right)^{-1} = \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right|$$
e quindi, in definitiva,
$$B = \left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right|$$
e si tratta ora di fare il prodotto.

Soluzione con notazione magica.
Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ la base di autovettori e sia $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ la base canonica. Sappiamo che
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = \left|\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{array}\right|,$$
conosciamo
$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right|$$
e vogliamo trovare $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F)$. Si ha:
$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) \cdot (M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}))^{-1}$$
da cui
$$\begin{aligned} M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F) &= \left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{array}\right| \cdot (\left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right|)^{-1} \\ &= \left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right| \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 4. Il polinomio caratteristico di F_A è $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ che ha radici complesse coniugate $\lambda_1 = -1 + i$ e $\lambda_2 = -1 - i$. Dato che il polinomio caratteristico di F_A non ha radici reali ne segue che F_A non ammette autovalori ne segue che F_A non è diagonalizzabile. D'altra parte $F_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ è diagonalizzabile: infatti $F_A^{\mathbb{C}}$ ha ancora polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2\lambda + 2$; quindi $F_A^{\mathbb{C}}$ ammette 2 autovalori *distinti* ed è quindi diagonalizzabile. La matrice diagonale associata a $F_A^{\mathbb{C}}$ è la matrice

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{vmatrix}$$

Notiamo che $V_{-1+1} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 - iz_2 = 0\} = \mathbb{C}(1, -i)$ e $V_{-1-i} = \mathbb{C}(1, i)$; concludiamo allora che una base di autovettori e data da

$$\underline{v}_1 = (1, -i)\,, \quad \underline{v}_2 = (1, i)\,.$$

Osservazione: si potrebbe pensare che data $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ed $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ risulti che $F_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ sia sempre diagonalizzabile. Ci sono facili esempi che mostrano che questa affermazione è falsa: sebbene $F_A^{\mathbb{C}}$ ammetta n autovalori complessi contati con la loro molteplicità non è detto che sia diagonalizzabile (affinché ciò accada è necessario e sufficiente che la molteplicità algebrica sia uguale a quella geometrica per ogni autovalore di $F_A^{\mathbb{C}}$).

Soluzione esercizio 5. Un semplice calcolo mostra che T ammette l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 1 e l'autovalore $\lambda = 1$ con m.a. uguale a 2. Si ha inoltre $V_T(0) = \mathbb{R}(1, -1, -1)$, $V_T(1) = \mathbb{R}(-2, 2, 1)$. Ne segue che T non è diagonalizzabile perché la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ è strettamente minore della sua molteplicità algebrica.