Geometria 1. a.a. 2019-2020. Prof. Paolo Piazza
Secondo Compito Scritto. 13/07/2020

Nome e Cognome: ____________________

email istituzionale: ____________________

ORALE:

1. Cerchiate la vostra scelta.

2. Se avete già deciso di avvalervi della possibilità di verbalizzare direttamente il minimo fra X:=(voto scritto + voto bonus) e 26, scrivete vicino alla data scelta " no orale". Se non avete deciso, non scrivete nulla.

16/7

22/7

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	6	
3	8+2	
4	6+1	
5	6	
Totale	34 + 3	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. Piano euclideo $E^2(\mathbb{R})$ con coordinate x, y rispetto ad un fissato sistema di riferimento cartesiano. Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$X^2 + 10XY + Y^2 + 14\sqrt{2}X + 22\sqrt{2}Y + 52 = 0.$$

1. Classificare la conica dal punto di vista affine, verificando in particolare che è a centro.
2. Determinare un' isometria ϕ di $E^2(\mathbb{R})$ ed una conica canonica euclidea $\mathcal{D}$ in modo tale che $\mathcal{C} = \phi(\mathcal{D})$.
3. Disegnare la conica $\mathcal{C}$.
4. Determinare l'equazione cartesiana della retta contenente i fuochi di $\mathcal{C}$.
5. Determinare il centro di $\mathcal{C}$.

Esercizio 2. In $A^2(\mathbb{C})$ consideriamo le curva algebrica $\mathcal{C}$ di equazione $f(X,Y) = 2XY^2 - (X+2Y)^2 = 0$.
1. Dimostrare che l'origine $O = (0,0)$ è un punto singolare; determinare le tangenti principali in O. Stabilire in particolare se O è un punto doppio o triplo, singolare ordinario o non-ordinario.
2. Determinare, se esistono, gli asintoti di $\mathcal{C}$.

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio vettoriale euclideo $(V, <\,,\,>)$ dove $V = \mathbb{R}_2[t]$ è lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2 e dove $<\,,\,>: V \times V \to \mathbb{R}$ è il prodotto scalare

$$< p, q >:= p(0)q(0) + p(1)q(-1) + p(-1)q(1) + 3p'(0)q'(0) \tag{1}$$

(potete assumere in un primo momento che questo è un prodotto scalare).
Fissiamo la base standard $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ e siano (x_0, x_1, x_2) le coordinate associate. Sia $W := \mathrm{Span}(p_1, p_2)$ con $p_1(t) = 1$ e $p_2(t) = -1 + t^2$.
1. Determinare equazioni cartesiane per $W^\perp$ ed una sua base. Determinare $p \in W^\perp$ tale che $\|p\| = 3$.
2. Determinare la matrice associata nella base $\mathcal{E}$ all'operatore P di proiezione ortogonale su W: $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P)$.
3. Determinare $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(S)$ con S l'operatore di simmetria ortogonale rispetto a $W^\perp$.
Suggerimento per 2) e 3): utilizzando proprietà viste negli esercizi a casa potete minimizzare i conti.
4. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri e spiegare perché: $P \in O(V)\,, P \in SO(V)\,, S \in O(V)\,, S \in SO(V)\,.$
5. Facoltativo. Verificare che (1) definisce un prodotto scalare.

Esercizio 4. Spazio euclideo numerico E^4 con coordinate standard. Sia S l'iperpiano di equazione

$$X_1 + X_2 - X_3 + X_4 + 5 = 0$$

Siano $\Pi_S : E^4 \to E^4$ e $\rho_S : E^4 \to E^4$ rispettivamente la proiezione ortogonale su S e la simmetria ortogonale rispetto a S (anche detta *riflessione rispetto a* S). [1] Sia $\underline{t}$ un punto generico di E^4.
1. Determinare $A, B \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $\underline{c}$, $\underline{d}$ in $\mathbb{R}^4$ tali che

$$\Pi_S(\underline{t}) = A\,\underline{t} + \underline{c}\,, \quad \rho_S(\underline{t}) = B\,\underline{t} + \underline{d}\,.$$

2. Facoltativo. Vero o Falso: ρ_S *è un'isometria di* E^4. Spiegare....

Esercizio 5.
5.1. Piano proiettivo numerico $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate proiettive omogenee (x_0, x_1, x_2). Determinare l'equazione cartesiana omogenea per la retta passante per i punti P e Q di coordinate rispettivamente $[1,0,2]$ e $[0,1,1]$.
5.2. Spazio proiettivo numerico $P^3(\mathbb{R})$ con coordinate proiettive omogenee (x_0, x_1, x_2, x_3). Consideriamo lo spazio affine $A^3(\mathbb{R})$ e l'applicazione di passaggio a coordinate omogenee:

$$A^3(\mathbb{R}) \ni (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{j_0} [1, x_1, x_2, x_3] \in P^3(\mathbb{R}) \setminus H_0 \subset P^3(\mathbb{R})$$

con H_0 il piano proiettivo di equazione $X_0 = 0$. Si considerino le rette affini r e s di equazioni

$$r : x_1 + 2x_2 + x_3 = x_1 - x_3 + 5 = 0\,, \quad s : 2x_1 - x_2 + 3 = x_1 - x_2 + 2 = 0$$

Determinare l'equazione cartesiana del piano proiettivo passante per il punto $[1,0,0,1]$ e per i punti impropri di r e s.

[1] Nelle notazioni di Sernesi Π_S è $p_{S,U}$ con U lo spazio vettoriale ortogonale alla giacitura di S.