Geometria 1. a.a. 2019-2020. Prof. Paolo Piazza
Secondo Compito Scritto. 13/07/2020

Nome e Cognome: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	6	
3	8+2	
4	6+1	
5	6	
Totale	34 + 3	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. Piano euclideo $E^2(\mathbb{R})$ con coordinate x, y rispetto ad un fissato sistema di riferimento cartesiano. Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$X^2 + 10XY + Y^2 + 14\sqrt{2}X + 22\sqrt{2}Y + 52 = 0.$$

1. Classificare la conica dal punto di vista affine, verificando in particolare che è a centro.
2. Determinare un' isometria ϕ di $E^2(\mathbb{R})$ ed una conica canonica euclidea $\mathcal{D}$ in modo tale che $\mathcal{C} = \phi(\mathcal{D})$.
3. Disegnare la conica $\mathcal{C}$.
4. Determinare l'equazione cartesiana della retta contenente i fuochi di $\mathcal{C}$.
5. Determinare il centro di $\mathcal{C}$.

Soluzione.
1. Scriviamo la matrice associata alla conica:

$$\begin{vmatrix} 52 & 7\sqrt{2} & 11\sqrt{2} \\ 7\sqrt{2} & 1 & 5 \\ 11\sqrt{2} & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Siccome il determinante di tale matrice è diverso da zero e il determinante della sottomatrice $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ è negativo, $\mathcal{C}$ è un'iperbole non degenere.
2. La sottomatrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $p(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 25$, pertanto gli autovalori sono 6 e -4 e gli autovettori unitari sono rispettivamente $\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ e $\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$. Denotando la base standard con $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ possiamo riscrivere:

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2 \\ \underline{v}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2 \end{cases}$$

da cui si ottiene il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}X' - \frac{1}{\sqrt{2}}Y' \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}X' + \frac{1}{\sqrt{2}}Y' \end{cases}$$

che riscriviamo sinteticamente come

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = M \begin{vmatrix} X' \\ Y' \end{vmatrix} \quad \text{con} \quad M = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

Sostituendo nell'equazione della conica otteniamo l'equazione:

$$6X'^2 - 4Y'^2 + 36X' + 8Y' + 52 = 0.$$

Cerchiamo ora un'opportuna traslazione che porti l'equazione ottenuta in quella di una conica canonica. Tramite la sostituzione

$$\begin{cases} X' = \bar{X} + \alpha \\ Y' = \bar{Y} + \beta \end{cases}$$

possiamo riscrivere

$$6\bar{X}^2 - 4\bar{Y}^2 + 12(\alpha+3)\bar{X} - 8(\beta-1)\bar{Y} + 6\alpha^2 - 4\beta^2 + 36\alpha + 8\beta + 52 = 0.$$

Ponendo $\alpha = -3, \beta = 1$ in modo che i coefficienti dei termini lineari si annullino otteniamo

$$3\bar{X}^2 - 2\bar{Y}^2 + 1 = 0.$$

Scambiando infine $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ otteniamo $2\tilde{X}^2 - 3\tilde{Y}^2 = 1$ e cioè la conica in forma canonica

$$\frac{\tilde{X}^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} - \frac{\tilde{Y}^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1\,.$$

Mettendo insieme tutti i cambiamenti di coordinate otteniamo

$$\begin{cases} \tilde{X} = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y - 1 \\ \tilde{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y + 3 \end{cases}\,.$$

che riscriviamo come

$$\begin{vmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{vmatrix} = N \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \text{con} \quad N = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

Notiamo che $N^T = N$ e quindi, dato che $N \in O(2)$, $N^{-1} = N$. Quindi

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = N \begin{vmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{vmatrix} + N \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \end{vmatrix}$$

che ci dà

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = N \begin{vmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

Riassumendo, se sostituiamo ad (X, Y) l'espressione che abbiamo appena scritto, otteniamo l'equazione canonica

$$\frac{\tilde{X}^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} - \frac{\tilde{Y}^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1\,.$$

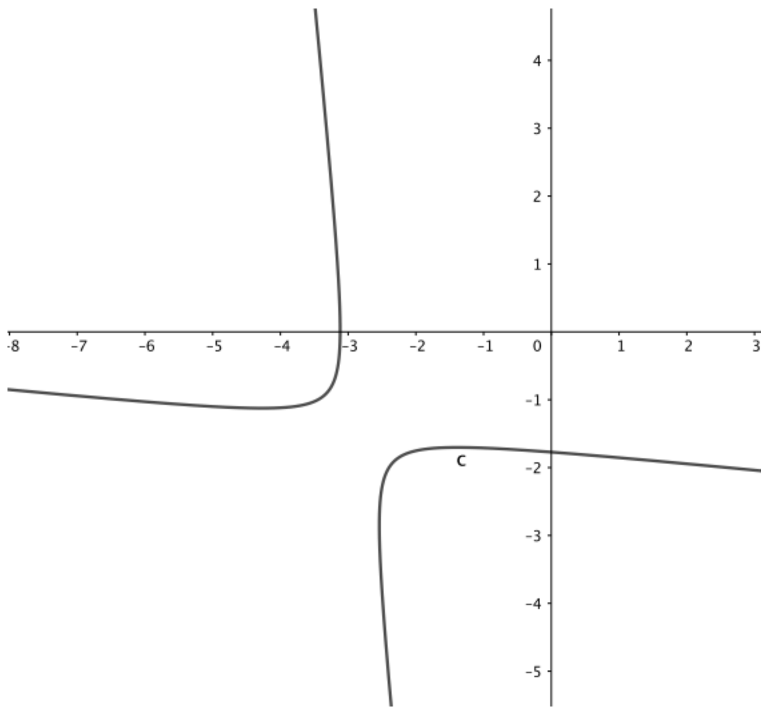
Ne segue che se ϕ è l'isometria

$$\phi := T_{N,\underline{c}} \quad \text{con} \quad N = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{c} = \begin{vmatrix} -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

allora $\mathcal{C} = \phi(\mathcal{D})$ con $\mathcal{D}$ la conica canonica

$$\frac{X^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} - \frac{Y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1\,.$$

3. Il grafico della conica $\mathcal{C}$ è il seguente:



4. L'equazione della retta per i fuochi della conica canonica $\mathcal{D}$ è $Y = 0$ e cioè la retta per l'origine di parametri direttori $(1, 0)$. Quindi la retta per i fuochi della conica $\mathcal{C}$ ha equazione

$$X + Y + 3\sqrt{2} = 0$$

perché essa è la retta di parametri direttori $N \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ e passante per $\phi(0, 0)$.

5. Il centro della conica $\mathcal{D}$ è l'origine; quindi il centro della conica $\mathcal{C}$ ha coordinate $\phi(0, 0)$ e cioè $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Esercizio 2. In $A^2(\mathbb{C})$ consideriamo le curva algebrica $\mathcal{C}$ di equazione $f(X, Y) = 2XY^2 - (X+2Y)^2 = 0$.
1. Dimostrare che l'origine $O = (0, 0)$ è un punto singolare; determinare le tangenti principali in O. Stabilire in particolare se O è un punto doppio o triplo, singolare ordinario o non-ordinario.
2. Determinare, se esistono, gli asintoti di $\mathcal{C}$.

Soluzione.
1. Verifichiamo che le derivate parziali prime del polinomio f si annullano in $O = (0, 0)$. Infatti

$$f_X(X, Y) = 2Y^2 - 2(X + 2Y); \qquad f_Y(X, Y) = 4XY - 4(X + 2Y)$$

dunque $f_X(0, 0) = f_Y(0, 0) = 0$. Ne segue che O è un punto almeno doppio. Per verificare che O è precisamente doppio calcoliamo le derivate seconde di f:

$$f_{XX}(X, Y) = -2; \qquad f_{XY}(X, Y) = 4Y - 4; \qquad f_{YY}(X, Y) = 4X - 8$$

e notiamo che almeno una non si annulla nell'origine.
Consideriamo ora l'equazione parametrica della generica retta per l'origine:

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases} .$$

Sostitendo tali espressioni nell'equazione di $\mathcal{C}$ otteniamo

$$t^2(2ab^2t - (a + 2b)^2) = 0,$$

dunque le tangenti principali sono date dai valori dei parametri a e b tali che $a + 2b = 0$. Pertanto le due tangenti principali coincidono e hanno equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases}$$

L'equazione cartesiana dell'unica tangente principale è quindi $X + 2Y = 0$. Ne segue che O è un punto doppio non ordinario (è una cuspide).

2. I punti impropri di $\mathcal{C}$ si ottengono considerando la chiusura proiettiva $\mathcal{C}^*$ di $\mathcal{C}$ ed intersecandola con la retta impropria $X_0 = 0$. La chiusura proiettiva ha equazione $2X_1X_2^2 - (X_1 + 2X_2)^2X_0 = 0$ e quindi i punti impropri sono i punti $[0, 0, 1]$ e $[0, 1, 0]$ (punti impropri degli assi coordinati). È immediato verificare che questi punti sono semplici per $\mathcal{C}^*$; gli eventuali asintoti sono quindi le eventuali tangenti proprie a questi punti. Per capire se esistono asintoti e in caso affermativo determinarli, ragioniamo, ad esempio, al finito. Il fascio di rette parallele all'asse Y passa per $[0, 0, 1]$ (una volta che ne abbiamo preso la chiusura proiettiva); queste rette hanno equazione $X = k$ e le loro intersezioni con $\mathcal{C}$ sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2XY^2 - (X + 2Y)^2 = 0 \\ X = k \end{cases}$$

Otteniamo l'equazione di secondo grado $2kY^2-(k+2Y)^2 = 0$ che riscriviamo come $(2k-4)Y^2-4kY-k^2 = 0$. Questa equazione ha due soluzioni a meno che sia $k = 2$, nel qual caso si abbasso di grado ed ha

una sola soluzione. Ne deduciamo che la retta $X = 2$ ha molteplicità di intersezione 2 con $\mathcal{C}$ nel punto improprio $[0, 0, 1]$; essa è quindi l'asintoto cercato.
Un'altra possibile soluzione può essere fornita calcolando l'equazione della tangente a $\mathcal{C}^*$ nel punto $[0, 0, 1]$.
Lo stesso ragionamento mostra che $[0, 1, 0]$ *non* ammette asintoti; infatti

$$\begin{cases} 2XY^2 - (X + 2Y)^2 = 0 \\ Y = h \end{cases}$$

ha sempre due soluzioni al finito. E infatti, è facile verificare che la tangente a $\mathcal{C}^*$ in $[0, 1, 0]$ è la retta impropria.

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio vettoriale euclideo $(V, <\,,\,>)$ dove $V = \mathbb{R}_2[t]$ è lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2 e dove $<\,,\,>: V \times V \to \mathbb{R}$ è il prodotto scalare

$$< p, q >:= p(0)q(0) + p(1)q(-1) + p(-1)q(1) + 3p'(0)q'(0) \tag{1}$$

(potete assumere in un primo momento che questo è un prodotto scalare).
Fissiamo la base standard $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ e siano (x_0, x_1, x_2) le coordinate associate. Sia $W := \mathrm{Span}(p_1, p_2)$ con $p_1(t) = 1$ e $p_2(t) = -1 + t^2$.
1. Determinare equazioni cartesiane per $W^\perp$ ed una sua base. Determinare $p \in W^\perp$ tale che $\|p\| = 3$.
2. Determinare la matrice associata nella base $\mathcal{E}$ all'operatore P di proiezione ortogonale su W: $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P)$.
3. Determinare $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(S)$ con S l'operatore di simmetria ortogonale rispetto a $W^\perp$.
Suggerimento per 2) e 3): utilizzando proprietà viste negli esercizi a casa potete minimizzare i conti.
4. Stabilire quali dei seguenti enunciati sono veri e spiegare perché: $P \in O(V)\,, P \in SO(V)\,, S \in O(V)\,, S \in SO(V)\,.$
5. Facoltativo. Verificare che (1) definisce un prodotto scalare.

Soluzione.
1. Sia $p(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2$. I vettori $p_1(t)$ e $p_2(t)$ sono una base di W; quindi $p \in W^\perp$ se e solo se $< p, p_1 >= 0$ e $< p, p_2 >= 0$. Sostituendo le coordinate di p, p_1 e p_2 ed applicando la definizione di $<\,,\,>$ otteniamo che $p \in W^\perp$ se e solo se

$$\begin{cases} 3x_0 + 2x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

e quindi se e solo se

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi una base di $W^\perp$ è data dal vettore di coordinate $(0, 1, 0)$ e cioè dal polinomio $q(t) = t$. Questo vettore ha lunghezza unitaria, $\|q\| = 1$, e quindi, dalle properietà della norma, segue che $\|3q\| = 3$.
2. Sia A la matrice cercata, $A = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P)$ e denotiamo con $\{\underline{e}_j\}$ i vettori della base standard $\mathcal{E}$. Dal punto 1 sappiamo che $(\mathbb{R}_2[t], <\,,\,>)$ è somma diretta *ortogonale* di $\mathbb{R}\underline{e}_2$ e di $\mathrm{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$. Dalla definizione di proiezione ortogonale ne deduciamo immediatamente che

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Vediamo una soluzione più generale, che non utilizzi la forma speciale di questi sottospazi.
Sappiamo che se $\widetilde{P}$ è la proiezione su $W^\perp$ allora $P + \widetilde{P} = \mathrm{Id}$. Conviene allora determinare la matrice $\widetilde{A}$ associata a $\widetilde{P}$ perché $W^\perp$ ha dimensione 1 (risulterà quindi che $A = I_3 - \widetilde{A}$ perché $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}} : \mathrm{End}(V) \to M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è un isomorfismo di spazi vettoriali). Per definizione si ha che $\widetilde{P}(p) =< p, q > \underline{q}$ perché q è una base ortonormale di $W^\perp$. La j-ma colonna di $\widetilde{A}$ è ottenuta prendendo le coordinate di $\widetilde{P}(t^j)$ e facendo i conti si ottiene

$$\widetilde{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Da questa matrice si riottiene immediatamente A.

3. Per determinare $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(S)$, con S l'operatore di simmetria ortogonale rispetto a $W^\perp$, basterà ricordare che sussiste l'identità di operatori: $S = 2\widetilde{P} - \mathrm{Id}$. Quindi $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(S) = 2\widetilde{A} - I_3$.

4. Si ha che $P \notin O(V)$, $P \notin SO(V)$ perché gli elementi di $O(V)$ ed $SO(V)$ sono isomorfismi, mentre una proiezione non è mai iniettiva. È vero che $S \in O(V)$, lo abbiamo visto in un esercizio per casa; è anche vero che $S \in SO(V)$ perché il determinante di S è il prodotto degli autovalori ed S ha autovalori $\{-1,-1,1\}$ (l'autovalore 1 corrisponde all'autospazio $W^\perp$; l'autovalore -1 corrisponde all'autospazio W).

5. Se $p, q \in V$ hanno coordinate (p_0, p_1, p_2) e (q_0, q_1, q_2) nella base standard, allora (1) si riscrive come:

$$\begin{aligned} < p, q > &= p_0q_0 + (p_0 + p_1 + p_2)(q_0 - q_1 + q_2) + (p_0 - p_1 + p_2)(q_0 + q_1 + q_2) + 3p_1q_1 = \\ &= 3p_0q_0 + 2p_0q_2 + 2p_2q_0 + p_1q_1 + 2p_2q_2 \end{aligned}$$

dunque la matrice associata a $<,>$ è

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

La simmetria della forma bilineare segue dalla simmetria della matrice. Per verificare che è definita positiva possiamo calcolare il polinomio caratteristico $p(\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - 4(1-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 7\lambda + 2$ e utilizzare la regola di Cartesio per concludere che ha tre radici positive. In alternativa possiamo calcolare i minori principali della matrice, pari a $3, 3, 2$ e osservare che sono tutti positivi.

Esercizio 4. Spazio euclideo numerico E^4 con coordinate standard. Sia S l'iperpiano di equazione

$$X_1 + X_2 - X_3 + X_4 + 5 = 0$$

Siano $\Pi_S : E^4 \to E^4$ e $\rho_S : E^4 \to E^4$ rispettivamente la proiezione ortogonale su S e la simmetria ortogonale rispetto a S (anche detta *riflessione rispetto a* S). [1] Sia $\underline{t}$ un punto generico di E^4.

1. Determinare $A, B \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ e $\underline{c}$, $\underline{d}$ in $\mathbb{R}^4$ tali che

$$\Pi_S(\underline{t}) = A\,\underline{t} + \underline{c}\,, \quad \rho_S(\underline{t}) = B\,\underline{t} + \underline{d}\,.$$

2. Facoltativo. Vero o Falso: ρ_S *è un'isometria di* E^4. Spiegare....

Soluzione.

La direzione ortogonale all'iperpiano dato è la direzione data dai coefficienti delle X nell'equazione di S ed è quindi $\mathbb{R}(1,1,-1,1)$. Come spiegato durante il corso si calcola $\Pi_S(\underline{t})$ considerando le equazioni parametriche della retta per $\underline{t}$ di direzione $(1,1,-1,1)$ ed intersecando con l'iperpiano S. (Fate una figura in $\mathbb{R}^2$ con S una retta non per l'origine e $\underline{t}$ un punto generico di $\mathbb{R}^2$.) I punti di tale retta sono $(s+t_1, s+t_2, -s+t_3, s+t_4)$, al variare di $s \in \mathbb{R}$. Un tale punto appartiene ad S sse soddisfa l'equazione cartesiana di S e cioè sse $(s+t_1)+(s+t_2)-(-s+t_3)+(s+t_4)+5 = 0$ che ci dà $s = 1/4(-t_1-t_2+t_3-t_4-5)$. Risostituendo otteniamo le coordinate di $\Pi_S(\underline{t})$ che sono quindi, ordinatamente,

$\frac{3}{4}t_1 - \frac{t_2}{4} + \frac{t_3}{4} - \frac{t_4}{4} - \frac{5}{4}$

$-\frac{t_1}{4} + \frac{3}{4}t_2 + \frac{t_3}{4} - \frac{t_4}{4} - \frac{5}{4}$

$\frac{t_1}{4} + \frac{t_2}{4} + \frac{3}{4}t_3 + \frac{t_4}{4} + \frac{5}{4}$

$-\frac{t_1}{4} - \frac{t_2}{4} + \frac{t_3}{4} - \frac{3}{4}t_4 - \frac{5}{4}$

da cui deduciamo che

$$\Pi_S(\underline{t}) = A\underline{t} + \underline{c} \quad \text{con} \quad A = \begin{vmatrix} 3/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & -3/4 \end{vmatrix} \quad \text{e con} \quad \underline{c} = \begin{vmatrix} -5/4 \\ -5/4 \\ 5/4 \\ -5/4 \end{vmatrix}$$

[1] Nelle notazioni di Sernesi Π_S è $p_{S,U}$ con U lo spazio vettoriale ortogonale alla giacitura di S.

La matrice della simmetria si ottiene subito dalla definizione; infatti $\rho_S(\underline{t})$ è definito come il punto che soddisfa $-\overrightarrow{\Pi_S(\underline{t})\underline{t}} = \overrightarrow{\Pi_S(\underline{t})\rho_S(\underline{t})}$ (fate una figura) che vuol dire semplicemente $-(\underline{t}-\Pi_S(\underline{t})) = \rho_S(\underline{t})-\Pi_S(\underline{t})$ che riscriviamo come $\rho_S(\underline{t}) = 2\Pi_S(\underline{t}) - \underline{t}$. Da qui seguono subito B e $\underline{d}$: $B = 2A - I_4$ e $\underline{d} = 2\underline{c}$. Quindi

$$B = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & -5/2 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{d} = \begin{vmatrix} -5/2 \\ -5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{vmatrix}$$

È immediato verificare che $B \in O(4)$; quindi ρ_S è un'isometria.

Esercizio 5.
5.1. Piano proiettivo numerico $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate proiettive omogenee (x_0, x_1, x_2). Determinare l'equazione cartesiana omogenea per la retta passante per i punti P e Q di coordinate rispettivamente $[1, 0, 2]$ e $[0, 1, 1]$.
5.2. Spazio proiettivo numerico $P^3(\mathbb{R})$ con coordinate proiettive omogenee (x_0, x_1, x_2, x_3). Consideriamo lo spazio affine $A^3(\mathbb{R})$ e l'applicazione di passaggio a coordinate omogenee:

$$A^3(\mathbb{R}) \ni (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{j_0} [1, x_1, x_2, x_3] \in P^3(\mathbb{R}) \setminus H_0 \subset P^3(\mathbb{R})$$

con H_0 il piano proiettivo di equazione $X_0 = 0$. Si considerino le rette affini r e s di equazioni

$$r : x_1 + 2x_2 + x_3 = x_1 - x_3 + 5 = 0\,, \quad s : 2x_1 - x_2 + 3 = x_1 - x_2 + 2 = 0$$

Determinare l'equazione cartesiana del piano proiettivo passante per il punto $[1, 0, 0, 1]$ e per i punti impropri di r e s.

Soluzione:
L'equazione cartesiana omogenea della retta passante per i punti P e Q di coordinate rispettivamente $[1, 0, 2]$ e $[0, 1, 1]$ si ottiene imponendo che le coordinate omogenee di un punto generico $P = [X_0, X_1, X_2]$ siano combinazione lineare delle coordinate omogenee dei punti dati: si ottiene l'equazione

$$\det \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e cioè $-2X_0 - X_1 + X_2 = 0$.
2. Basta scrivere l'equazione cartesiana del piano proiettivo per il punto assegnato e per i punti impropri di r ed s. I parametri direttori di r sono $\ell = 1, m = -1, n = 1$ e quindi il punto improprio di r è $[0, 1, -1, 1]$. Analogamente il punto improprio di s è $[0, 0, 0, 1]$ e l'equazione del piano è quindi

$$\det \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e cioè} \quad X_1 + X_2 = 0.$$