Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2012-13.
Prof. P. Piazza

Compito per le vacanze di Natale.

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intendere la lingua e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto. (Galileo Galilei, *Saggiatore*)

Esercizio 0. Studiare la teoria vista ultimamente a lezione (geometria (vettoriale) euclidea). Aggiungere:

- definizione di proiezione ortogonale di un punto su una retta e di un punto su un piano
- definizione di angolo fra due rette orientate (Def. 12.5)
- definizione di angolo fra due piani orientati (Def. 12. 9)
- definizione di angolo fra una retta r ed un piano (Def. 12.11)
- formula per la distanza fra due punti
- definizione di distanza fra un punto ed una retta (Def. 12.12)
- definizione di distanza fra un punto ed una piano (Def. 12.13)
- definizione di distanza fra due rette (Def. 12.14).

Esercizio 1. Sia A la matrice 2×2 data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da A.
Determinare la matrice associata all'applicazione lineare L_A con la seguente scelta di basi:
base di partenza $= \{(0,2),(1,1)\}$, base di arrivo $= \{(0,1),(1,2)\}$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica fissata e coordinate associate $\underline{x}$. Consideriamo il piano vettoriale W di equazione cartesiana: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Determinare una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ con coordinate associate $\underline{y}$ in modo tale che W abbia equazione $y_3 = 0$ nelle nuove coordinate.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathcal{A}^3$ fissiamo un riferimento affine $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ con coordinate associate (x, y, z). Siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}^3$ i punti di coordinate $(1,2,3)$, $(0,2,-1)$ e $(1,1,1)$ rispettivamente. Verificare che P_1, P_2, P_3 non sono allineati. Dare l'equazione cartesiana del piano π contenente P_1, P_2, P_3.

Esercizio 4. Determinare l'equazione del piano per $Q_0 = (1,2,-1)$ e parallelo alle rette r ed s di equazioni

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3z = 1 \end{cases} , \qquad \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Esercizio 5. Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per $Q = (-1,-1,-1)$, contenuta nel piano π di equazione $x+y+z+3=0$ e complanare alla retta s di equazioni

$$\begin{cases} x-2z+4=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

Suggerimenti:
(i) la retta cercata è intersezione di due piani; quali piani dobbiamo considerare ?
(ii) una volta individuati i piani dovete ottenere le loro equazioni cartesiane; può essere utile il metodo del fascio.....

Esercizio 6. Determinare equazioni cartesiane per il piano passante per $(-1,0,1)$ ed ortogonale alla retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x+z+2=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$$

Esercizio 7. Spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x,y,z). Applicare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla seguente base di $\mathcal{V}_O$:

$$\underline{w}_1 = (1,1,0)\,, \quad \underline{w}_2 = (0,1,0)\,, \quad \underline{w}_3 = (0,0,2)\,.$$

Esercizio 8. Decidere se le due rette:

$$\begin{cases} x+1=0 \\ z-2=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x+y-2z+6=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$$

sono complanari. In caso affermativo, stabilire se sono incidenti o parallele e determinare l'equazione del piano che le contiene.

Esercizio 9. Sia $W = \mathbb{R}(1,-1,1)$ (Utilizziamo la notazione $\mathbb{R}(l,m,n)$ per il sottospazio $\mathrm{Span}((l,m,n))$.) Determinare un versore di questa retta. Determinare il versore di questa retta che forma un angolo acuto con il vettore $\underline{j}$ della base canonica.

Esercizio 10. Sia W la retta vettoriale di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Determinare i vettori di W che hanno lunghezza uguale a 2.

Esercizio 11. Consideriamo il piano vettoriale σ di equazione cartesiana

$$x+2y-z=0$$

(i) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right) \qquad \underline{f}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

costituiscono una base *ortonormale* di σ.

(ii) Decomporre il vettore $\underline{u} = (0,1,2)$ del piano σ nella somma $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 \in \mathbb{R}\underline{f}_1$ e $\underline{u}_2 \in \mathbb{R}\underline{f}_2$. [1]

Esercizio 12. Spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta ortogonale al piano generato da $\underline{w}_1 = (1,1,0)$ e $\underline{w}_2 = (0,1,-1)$.

Esercizio 13. Avete visto l'operazione di prodotto vettoriale di due vettori. In questo esercizio dovete utilizzare quello che avete imparato sul prodotto vettoriale ma anche molte delle nozioni viste durante questo corso di algebra lineare. Fissiamo una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ e scegliamo l'orientazione fissata da tale base.

Sia $\underline{u}$ il vettore di coordinate $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$:

$$\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{k}.$$

(13.1) Determinare l'equazione cartesiana del del sottospazio costituito dai vettori di $\mathcal{V}_O$ che sono ortogonali a $\underline{u}$.[2]

Si consideri l'applicazione $T : V \longrightarrow V$ che associa a $\underline{v}$ il vettore $\underline{u} \wedge \underline{v}$, con $\wedge$ uguale al prodotto vettoriale:

$$T\underline{v} = (\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{k}) \wedge \underline{v}.$$

Dalle proprietà del prodotto vettoriale sappiamo che T è lineare.

(13.1bis) Perché possiamo affermare, senza fare i conti, che $\dim \mathrm{Ker}T = 1$ e $\dim \mathrm{Im}T = 2$? Di fatto, senza fare i conti possiamo determinare precisamente chi è il nucleo e chi è l'immagine. Cercate di dare un argomento... (Suggerimento: utilizzare la definizione e le properietà del prodotto vettoriale....)

(13.2) Scrivere la matrice associata a T nella base fissata $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$.

(13.3) Scrivere equazioni cartesiane per il nucleo $\mathrm{Ker}(T)$ e per per l'immagine $\mathrm{Im}T$. Dare una base per questi sottospazi. (Potete procedere analiticamente, utilizzando (2.2), oppure geometricamente come in (2.1bis).)

(13.4) Determinare l'immagine tramite T della retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Verificare che il piano π di equazione cartesiana $2x + 2y - 3z = 0$ ha immagine tramite T uguale ad un piano e si determini l'equazione cartesiana di tale piano. Verificate poi che il piano σ di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 0$ ha invece immagine tramite T uguale ad una retta. Come si spiega questa differenza?

---

[1] *Suggerimento per (ii).* Sappiamo che $\underline{u} \in \sigma$. Quindi esistono coefficienti α e β tali che $\underline{u} = \alpha\underline{f}_1 + \beta\underline{f}_2$ e per definizione sarà $\underline{u}_1 = \alpha\underline{f}_1$, $\underline{u}_2 = \beta\underline{f}_2$. Utilizzare il fatto che $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ è una base ortonormale di σ e le proprietà di linearità del prodotto scalare per dimostrare che $\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = \alpha$ e che $\langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle = \beta$. Questo ragionamento non dovrebbe risultarvi nuovo....

[2] Brevemente: determinare l'equazione cartesiana del piano vettoriale ortogonale a $\mathbb{R}\underline{u}$.

Esercizio 14. Spazio vettoriale euclideo $\mathcal{V}_O$. Base ortonormale fissata. con coordinate (x, y, z) associate. Sono dati i piani

$$\alpha_1 : x + y - z = 0 \qquad \alpha_2 : x + y + z = 0$$

Siano S_1, S_2 le simmetrie ortogonali rispetto ad α_1, α_2 rispettivamente.

Scrivere le matrici associate a S_1 e S_2 nella base fissata (le denotiamo A_1 e A_2). Scrivere la matrice associata a $T := S_1 \circ S_2$. Verificare che il piano $\pi : x - y = 0$ è invariante per T (e cioè $T(\pi) \subset \pi$).

Esercizio 15. Sia $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle relazioni

$$S(1, 1, 2) = (3, -1, 2) \quad S(2, 1, 0) = (-2, 5, 0) \quad S(0, 0, 1) = (2, -2, 1).$$

Determinare la matrice associata ad S nella base canonica.