Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2012-13.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 14/12/12 (dodicesimo compito). SOLUZIONI.

Soluzione esercizio 1. I parametri direttori di r sono le coordinate di un suo vettore direttore e cioè di un vettore generatore del sottospazio r_0 associato al sottospazio affine r. r_0 è ottenuto considerando le soluzioni del sistema *omogeneo* associato al sistema che definisce r; in questo caso si ha quindi che r_0 è il sottospazio di equazione cartesiana $2x - y = 0$. Quindi $l = 1, m = 2$.
Per determinare l'equazione parametrica di r osserviamo che $P_0 = (-1, 0)$ è una soluzione dell'equazione di r; quindi $P_0 = (-1, 0) \in r$; ma allora abbiamo un punto di r ed i parametri direttori di r, ne segue che le eq. par. sono $x = -1 + t, y = 2t$. Altrimenti, risolviamo l'equazione. [1] In questo caso è tutto piuttosto banale: ponendo $y = t$ (variabile libera) e quindi $x = t/2 - 1$ da cui $x = t/2 - 1, y = t$ come prima.

Soluzione esercizio 2. Diamo una soluzione diretta: dire che le 3 rette sono incidenti in un punto vuol dire che l'intersezione delle 3 rette è non vuota e costituita da un punto. Basta allora verificare che il sistema 3×2 dato dalle 3 equazioni delle 3 rette ammette un'unica soluzione. Il rango della matrice dei coefficienti è chiaramente 2 (notare che questa è una matrice 3×2). Basta allora controllare(teorema di Rouché-Capelli) che il rango della matrice completa è anche 2, cioè, ad esempio, che

$$\det \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Calcolando il determinante scopriamo che è diverso da zero; ne segue che le 3 rette non sono incidenti.

Soluzione esercizio 3. Le due rette non sono parallele, avendo vettori direttori non-proporzionali. Ne segue che sono incidenti in un punto. Possiamo determinare l'intersezione P e poi scrivere la retta per 2 punti.
Oppure possiamo ispirarci al ragionamento fatto in dimensione tre e considerare il fascio di rette determinato dalle due rette date:

$$\lambda(2x - y + 3) + \mu(x + y + 1) = 0\,, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$$

Fra tutte queste rette (sono ∞^1) ne esiste una sola che passa per P_0. Per determinare quali λ e μ occorre scegliere, basterà imporre il passaggio per P_0: otteniamo l'equazione omogenea $\lambda(2) + \mu(2) = 0$, che ha soluzione $t(1, -1)$. Possiamo quindi scegliere $\lambda = 1$, $\mu = -1$ e risostituendo otteniamo $(2x - y + 3) - (x + y + 1) = 0$, cioè $x - 2y + 2 = 0$.

Soluzione esercizio 4.
(4.1)+ (4.2) Applicare meccanicamente le formule viste a lezione tenendo conto che una base per il sottospazio giacitura di π è dato da $\underline{v} = P_2 - P_1 = (-1, 1, 0)$, $\underline{v}' = P_3 - P_1 = (-1, 0, 1)$.
4.3 Prendere il fascio improprio definito dall'equazione di cui in 4.1 e imporre il passaggio per P. Il fascio improprio definito da un piano di equazione $ax + by +$

[1] questo è il metodo generale che abbiamo visto per passare da equazioni cartesiane di una sottovarietà affine ad equazioni parametriche.

$cz + d = 0$ è, per definizione, la famiglia dei piani paralleli a tale piano e cioè, per quanto visto a lezione, la famiglia $\{ax + by + cz + k = 0, k \in \mathbb{R}\}$.

Soluzione esercizio 5. Il piano coordinato yz ha equazioni $x = 0$. Il fascio di piani paralleli al piano coordinato yz ha equazione $x = d$, al variare di $d \in \mathbb{R}$. L'equazione cercata è allora $x = 2$.

Soluzione esercizio 7. Parametri direttori $l = 2, m = -1, n = 1$. Eq. cart.: possiamo ad esempio ricavare t dalla seconda equazione, $t = -y - 2$, e sostituirlo nella prima e terza equazione. Otteniamo

$$\begin{cases} x - 2(-y-2) - 1 = 0 \\ z - (-y-2) - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni non sono univocamente determinate (una retta è l'intersezione di infinite coppie distinte di piani, pensate allo spigolo di un libro). Ovviamente, possiamo anche sfruttare il fatto che deve essere

$$\operatorname{rg}\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{1}$$

Ciò è equivalente a

$$\begin{cases} \det\begin{vmatrix} x-1 & y+2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \det\begin{vmatrix} x-1 & z-3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

e queste *sono* equazioni cartesiane (sviluppando il determinante). Possiamo anche considerare

$$\left|\begin{array}{c|c} 2 & x-1 \\ -1 & y+2 \\ 1 & z-3 \end{array}\right|$$

ridurre con Gauss e imporre la compatibilità.

Soluzione esercizio 8. Basta risolvere esplicitamente il sistema omogeneo associato. Le equazioni parametriche di s le scriviamo immediatamente e da quelle le equazioni cartesiane.

Soluzione esercizio 9. Basta considerare il fascio di piani per la retta data ed imporre il passaggio per il punto $(0, 2, 0)$. Il fascio di piani ha equazioni

$$\lambda(x - z - 3) + \mu(y + 2z - 1) = 0$$

al variare di (λ, μ) in $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Imponendo il passaggio per $(0, 2, 0)$ si ottiene $-3\lambda + \mu = 0$ che ha soluzione $\lambda = 1$, $\mu = 3$ (a meno di un comune fattore di proporzionalità $t \in \mathbb{R} \setminus 0$). Risostituendo questi valori nell'equazione qui sopra, scopriamo che il piano cercato ha quindi equazione $x + 3y + 5z - 6 = 0$.

Soluzione esercizio 10. Dalle equazioni cartesiane di r possiamo scrivere il fascio di piani per r; imponendo il parallelismo con $(11, 0, -1)$ otteniamo un'equazione lineare omogenea in λ e μ e poi procediamo come nell'esercizio 9.

Soluzione esercizio 11. Notiamo che il punto non appartiene alla retta; il problema è quindi ben posto. Si può procedere in (almeno) due modi: si determinano 2 punti distinti sulla retta e si utilizza l'equazione del piano per 3 punti non allineati. Si può altrimenti scrivere l'equazione cartesiana della retta e procedere come nell'Es. 9.

Soluzione esercizio 12. Abbiamo visto che due rette r e ρ di equazione rispettivamente

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0 \end{cases} .$$

sono *complanari* se e soltanto se la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero. Il rango di questa matrice è quindi uguale a 2 oppure uguale a 3 (non può essere certo uguale 1 perché siamo partiti da due rette ben definite). Le due rette coincidono se e solo se il sistema dato dalle 4 equazioni in **3** incognite ha uno spazio di soluzioni, che sappiamo essere uno spazio affine, di dimensione 1. Ma 1=**3**-2. Applicando anche il teorema di Rouché-Capelli vediamo quindi che le due rette sono coincidenti se e solo se

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2\ , \tag{2}$$

Le due rette si incontrano in un punto, cioè in un sottospazio affine di dimensione 0 (e vi faccio notare che 0=**3**-3) se e solo se

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 3\ , \tag{3}$$

Infine, le due rette sono parallele se e solo se il sistema non ha soluzione e ciò può accadere, sempre per Rouché-Capelli, se e solo se

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3 \quad rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2 \tag{4}$$