

**Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2012-13.**  
**Geometria. Canale L-PE (Prof. Paolo Piazza).**  
**Compito a casa del 16/11/12 (ottavo compito)**

**Esercizio 0.** Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali e sia  $F : V \rightarrow W$  un isomorfismo. Verificare che  $F$  trasforma vettori linearmente indipendenti di  $V$  in vettori linearmente indipendenti di  $W$ . Dedurre che  $F$  trasforma sottospazi di dimensione  $k$  di  $V$  in sottospazi di dimensione  $k$  di  $W$ .

**Esercizio 1.** Sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^5$  definito come l'insieme degli  $\underline{x} \in \mathbb{R}^5$  soluzioni di

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

**1.1** Determinare la dimensione di  $U$ . Determinare una base di  $U$ .

**1.2** Determinare  $\ell \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e un'applicazione lineare iniettiva  $T : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^5$  che abbia come immagine  $U$  (vi ricordo che un'applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base del dominio).

**1.3** Determinare l'espressione in coordinate di  $T$  e cioè una matrice  $C$  tale che  $T = L_C$  (cercate di determinare le colonne di  $C$ ).

**1.4** Determinare equazioni parametriche per  $U$ .

**Esercizio 2.** Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio  $W$  di  $\mathbb{R}^5$  definito da

$$W = \text{Span} \left( \left( \begin{array}{c|c|c} 1 & & 1 \\ 0 & & 1 \\ -1 & & 1 \\ -1 & & -1 \\ 0 & & -1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c|c|c} 1 & & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & & 1 \\ -1 & & -1 \\ -1 & & -1 \end{array} \right) \right)$$

**Esercizio 3.** Determinare una base per  $U \cap W$ , con  $U$  il sottospazio dell'esercizio 1 e  $W$  il sottospazio dell'esercizio 2.

**Esercizio 4.** Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio affine di  $\mathbb{R}^3$  parallelo al sottospazio  $W = \text{Span}(1, -1, 2)$  e contenente il vettore  $\underline{v}_0 := (0, 1, 0)$ .

**Esercizio 5.** (Molto istruttivo) Sia  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Quindi  $Q = L_A$ .

(5.0) Scrivere l'espressione di  $Q$  in coordinate.

(5.1) Determinate equazioni cartesiane e parametriche per  $\text{Ker}(Q)$  e  $\text{Im}Q$ . Studiare l'iniettività/suriettività di  $Q$ . Determinare la controimmagine del vettore  $(2, -1, 5)$ <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Vi ricordo che se  $f : A \rightarrow B$  è un'applicazione fra insiemi, allora la controimmagine di  $b \in B$  tramite  $f$  è il sottoinsieme di  $A$  definito da  $\{a \in A \mid f(a) = b\}$ . Analogamente si definisce la controimmagine di un sottoinsieme di  $B$ . La controimmagine di  $b$  tramite  $f$  viene denotata con  $f^{-1}(b)$ .

(5.2) Determinare l'immagine tramite  $Q$  della retta<sup>2</sup> di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

(5.3) Determinare equazioni cartesiane per l'immagine del piano  $\pi$  di equazione  $x_1 - x_3 = 0$ . Qual è la dimensione di  $Q(\pi)$ ?

(5.4) Determinare equazioni parametriche per l'immagine del piano  $\sigma$  di equazione  $5x_1 - 3x_2 = 0$ . Qual è la dimensione di  $Q(\sigma)$ ?

Confrontare le dimensioni di  $Q(\pi)$  e  $Q(\sigma)$ . C'è qualcosa di strano oppure è tutto OK ?

Cercate di spiegare cosa succede.

**Esercizio 6.** Calcolare il prodotto righe per colonne  $AB$ , con

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

---

<sup>2</sup>Se  $f : A \rightarrow B$  è un'applicazione fra insiemi, allora l'immagine di un sottoinsieme  $A'$  di  $A$  mediante  $f$  è il sottoinsieme di  $B$  definito da  $f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}$ .