

**Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2012-13.**  
**Geometria. Canale L-PE (Prof. Paolo Piazza).**  
**Compito a casa del 9/11/12 (settimo compito)**

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema omogeneo di 3 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che trattasi di un sistema omogeneo a scala  $S\underline{x} = \underline{0}$ .

Determinare i pivots della matrice  $S$ . Determinare le variabili dipendenti del sistema e quelle libere. Risolvere il sistema. Sia  $\Sigma_0$  l'insieme delle soluzioni. Spiegare perché  $\Sigma_0$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^6$ . Determinare  $k \in \mathbb{N}$  e  $k$  vettori  $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$  in  $\mathbb{R}^6$  in modo tale che

$$\Sigma_0 = \text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$$

Determinare una base per  $\Sigma_0$ .

Determinare il rango di  $S$ . Determinare una base per  $\text{Im}S$ .

Si consideri ora il sistema non-omogeneo di 3 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_5 - x_6 = 2 \end{cases}$$

Osserviamo che trattasi di un sistema a scala  $S\underline{x} = \underline{c}$ . Sia  $\Sigma$  l'insieme delle soluzioni. Determinare  $k \in \mathbb{N}$  e  $k + 1$  vettori  $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k, \underline{v}_0\}$  in  $\mathbb{R}^6$  in modo tale che

$$\Sigma = \underline{v}_0 + \text{Span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k)$$

Confrontare  $\Sigma$  e  $\Sigma_0$ .

**Esercizio 2.** Si consideri il sistema *omogeneo* di 4 equazioni in 5 incognite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Sia  $\Sigma_0$  l'insieme delle soluzioni. Esprimere  $\Sigma_0$  come nucleo di un'applicazione lineare  $L_A$ .

Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema omogeneo *a scala*,  $S\underline{x} = \underline{0}$ , equivalente al sistema dato.

Determinare  $k \in \mathbb{N}$  e  $k$  vettori in  $\mathbb{R}^5$  in modo tale che  $\Sigma_0 = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ . Determinare una base di  $\Sigma_0$ .

**Esercizio 3.** Si consideri il sistema non-omogeneo di 4 equazioni in 5 incognite (ottenuto dal sistema omogeneo dell'esercizio precedente)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

**3.0** Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema *a scala*,  $S\underline{x} = \underline{c}$ , equivalente al sistema dato.

**3.1** Verificare che il sistema a scala  $S\underline{x} = \underline{c}$  è compatibile. (Otteniamo quindi la compatibilità del sistema iniziale.)

**3.2** Sia  $\Sigma$  l'insieme delle soluzioni del sistema iniziale. Scrivere  $\Sigma$  nella forma

$$\Sigma = \text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell) + \underline{v}_0$$

per un opportuno  $\ell \in \mathbb{N}$  e per opportuni vettori  $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell, \underline{v}_0$  in  $\mathbb{R}^5$ . (*Suggerimento:* utilizzare l'esercizio precedente ....)

**Esercizio 4.** Determinare una base per il sottospazio di  $\mathbb{R}^5$ :

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$$

**Esercizio 5.** Siano  $U, V \subset \mathbb{R}^4$  i sottospazi di  $\mathbb{R}^4$  dati da

$$U = \text{Span} \left( \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right), \quad V = \text{Span} \left( \begin{array}{c|c|c} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

Determinare basi di  $U$  e di  $V$ . Determinare una base per  $U+V$  (È ovvio che  $U+V$  ha come insieme di generatori i vettori ottenuti prendendo l'unione di generatori di  $U$  ed di generatori di  $V$ .) Stabilire se  $\mathbb{R}^4$  è somma diretta di  $U$  e  $V$ , cioè se  $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ .

**Esercizio 6.** Sia  $A \in M_{34}(\mathbb{R})$  la matrice data da

$$A = \begin{array}{c|c|c|c} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{array}$$

e sia  $L_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare ad essa associata. Determinare una base per  $\text{Ker}(L_A)$  ed una base per  $\text{Im}(L_A)$ . Studiare iniettività e suriettività di  $L_A$ . Dire se  $L_A$  è bigettiva.