**Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2012-13.**
**Geometria. Canale L-PE (Prof. Paolo Piazza).**
**Compito a casa del 2/11/12 (sesto compito)**

**Esercizio 1.** Sia $W \subset \mathbb{R}^5$ il sottospazio $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0\}$. Determinare un sottospazio $U$ di $\mathbb{R}^5$ tale che $W \oplus U = \mathbb{R}^5$. (Determinare $U$ vuol dire qui dare $U$ tramite una sua base.) Determinare un secondo sottospazio $U'$ distinto da $U$ ma tale che sia ancora $\mathbb{R}^5 = W \oplus U'$.
Suggerimenti: qual è la dimensione di $W$ ? Che dimensione ci aspettiamo per $U$?

**Osservazione preliminare all'esercizio 2.** Se $U$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e se $W$ è un secondo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$, allora $U \cap W$, che sappiamo essere un sottospazio, è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ con $C = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$.

**Esercizio 2.** In $\mathbb{R}^4$ sono dati $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\underline{x} = \underline{0}\}$ con $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Verificare se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

**Esercizio 3.** V ricordo che una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j$; una matrice $A$ è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni $i, j$. Sappiamo che che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio e che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è anche un sottospazio.

Verificare che $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) = \underline{0}$; verificare che $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ (suggerimento: utilizzare il fatto che $A = (A + A^T)/2 + (A - A^T)/2)$). Dedurne che $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$. Determinare le dimensioni di $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$

**Esercizio 4.** Siano $V$ e $W$ due spazi vettoriali e $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $n = \dim V$ e $m = \dim W$.
**4.1** Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
*se $n > m$ l'applicazione lineare $T$ non può essere iniettiva.*
**4.2**. Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
*se $n < m$ l'applicazione lineare $T$ non può essere suriettiva.*
Giustificate la vostra risposta.

**Esercizio 5.** Sia $V$ uno spazio vettoriale e siano $U$ e $W$ due sottospazi. Supponiamo che $V = U + W$.
Dimostrare che $V = U \oplus W$ se e solo se ogni vettore di $V$ si scrive in maniera *unica* come somma di un vettore in $U$ e di un vettore in $W$ (in formule: se $\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{w}_1$ e $\underline{v} = \underline{u}_2 + \underline{w}_2$ con $\underline{u}_i \in U$ e $\underline{w}_i \in W$ allora $\underline{u}_1 = \underline{u}_2$ e $\underline{w}_1 = \underline{w}_2$).

**Esercizio 6 .** Sia $V$ lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia $\pi$ un sottospazio vettoriale di dimensione 2, cioè un piano, ed $r$ una retta non contenuta in $\pi$. Sappiamo che : $V = r \oplus \pi$; quindi ogni vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ si scrive in maniera unica come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in r$ e $\underline{w}_2 \in \pi$.
Definiamo un'applicazione $P_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associando a $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ il vettore $\underline{w}_1 \in \mathbb{R}^3$ : quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione.
**6.1** Verificare che l'applicazione $P_1$ è *lineare.* (Suggerimento: usare l'unicità di cui nell'esercizio precedente.) Essa è, per definizione, la proiezione su $r$ parallelamente a $\pi$.

La legge $\underline{w} \longrightarrow \underline{w}_2$ definisce la proiezione su $\pi$ parallelamente a $r$; questa è anche un'applicazione lineare ed è denotata tramite $P_2$. Quindi $P_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$.
Abbiamo altre due applicazione *lineari* definite dalla decomposizione $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus r$. La simmetria $S_1$ rispetto a $r$ parallelamente a $\pi$ e la simmetria $S_2$ rispetto a $\pi$ parallelamente a $r$:

$$S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \qquad S_2(\underline{w}) = \underline{w}_2 - \underline{w}_1.$$

**6.2** Disegnate $\pi$, $r$ ed un generico $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ con $\underline{w} \notin r$, $\underline{w} \notin \pi$; sul disegno indicate $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.
**6.3**. Determinare l'immagine ed il nucleo di $P_1$ e $P_2$. Spiegare perché $S_1$ e $S_2$ sono bigezioni.

**Esercizio 7 .** Generalizzate l'esercizio precedente (con l'esclusione del disegno) ad un qualsiasi spazio vettoriale $V$ che sia somma diretta di due suoi sottospazi, $V = U \oplus W$, definendo la proiezione su $U$ parallelamente a $W$, la proiezione su $W$ parallelamente a $U$, la simmetria rispetto a $U$ parallelamente a $W$ e la simmetria rispetto a $W$ parallelamente a $U$. Determinare nucleo ed immagine delle proiezioni. Spiegare perché le simmetrie sono bigezioni.