Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2012-13.
Geometria. Canale L-PE (Prof. Paolo Piazza).
Compito a casa del 2/11/12 (sesto compito).
SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1. W ha dimensione $5-1=4$. Sia $\underline{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^5$ non appartenente a W; basta prendere un vettore che non soddisfa l'equazione che definisce W, ad esempio $\underline{u}=(1,1,1,1,1)$. Allora $\mathrm{Span}(\underline{u})=\{(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\alpha),\alpha\in\mathbb{R}\}$ ha dimensione 1 ed ha intersezione banale con W: $U\cap W=\{\underline{0}\}$. Per Grassmann $\dim(U+W)=4+1-0=5$; ma allora $U+W=\mathbb{R}^5$. Conclusione $\mathbb{R}^5=W\oplus U$. Se scegliamo $U'=\mathrm{Span}(\underline{u}')$ con $\underline{u}'\notin W$ e $\underline{u}'\neq\underline{u}$ allora $\mathbb{R}^5=W\oplus U'$ ma $U\neq U'$.

Soluzione esercizio 2. Innanzitutto osserviamo che rgA = rgB = 2. Infatti il rango di A (ad esempio) è la dimensione di $\mathrm{Im}L_A$ che è lo span delle colonne di A. Ora, le colonne di A sono in $\mathbb{R}^2$ e sappiamo che in $\mathbb{R}^2$ ci sono al più due vettori linearmente indipendenti; quindi rgA ≤ 2; dato che le prime due colonne di A sono non-proporzionali concludiamo che rgA = 2. Analogamente rgB = 2. Quindi, per il teorema della dimensione, $\dim U=\dim W=4-2=2$. L'intersezione ha dimensione $4-\mathrm{rg}C$ con C uguale alla matrice 4×4 ottenuta considerando $\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$.
Applicando Gauss vediamo che C è non-singolare e quindi $\mathrm{rg}C=4$. Ne segue che $U\cap W=\{\underline{0}\}$; per Grassmann $\dim(U+W)=4$. Ne segue che $\mathbb{R}^4=U\oplus W$

Soluzione esercizio 3. Siano A e B due matrici simmetriche e λ un numero reale. Abbiamo già visto che l'insieme delle matrici simmetriche e quello delle matrici antisimmetriche sono un sottospazio.

È bene osservare che A è simmetrica se e solo se coincide con la sua trasposta: $A=A^T$. Analogamente: A è antisimmetrica se e solo se $A=-A^T$.

È chiaro che se a_{ij} è simultaneamente uguale a a_{ji} ed a $(-a_{ji})$, allora deve essere $a_{ij}=0$. Da questa osservazione segue subito che $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})\cap\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})=\underline{0}$. D'altra parte, se $A\in M_{nn}(\mathbb{R})$ allora

$$A=\frac{(A+A^T)}{2}+\frac{(A-A^T)}{2}$$

e dato che il primo addendo a destra appartiene a $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ [1] ed il secondo appartiene a $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ abbiamo dimostrato che $M_{nn}(\mathbb{R})=\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})\oplus\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$.

Per quanto riguarda le dimensioni, osserviamo che in generale vale $\dim\mathcal{S}_{nn}=n(n+1)/2$ e $\dim\mathcal{A}_{nn}=n(n-1)/2$. Cercate di capire perché....

Soluzione esercizio 4. Per ipotesi $n=\dim V$ e $m=\dim W$. La **4.1** è vera, infatti, per il teorema della dimensione $\dim\mathrm{Ker}T=n-\dim\mathrm{Im}T$. Dato che $\mathrm{Im}T\subset W$, si ha $\dim\mathrm{Im}T\leq m$; per ipotesi $n-m>0$, e quindi $n-\dim\mathrm{Im}T>0$. Conclusione: $\dim\mathrm{Ker}T>0$ e T non può essere iniettiva. La **4.2** è anche vera, infatti, sempre per il teorema della dimensione $\dim\mathrm{Im}T=n-\dim\mathrm{Ker}T$. Dato che $\dim\mathrm{Ker}T\geq 0$ si ha che $\dim\mathrm{Im}T\leq n$ ed essendo per ipotesi $n<m$ ne segue che $\dim\mathrm{Im}T<m$ e quindi T non può essere suriettiva.

Soluzione esercizio 5. Supponiamo che $V=U\oplus W$. Sia $\underline{v}=\underline{u}+\underline{w}$ e supponiamo che esista un'altra decomposizione $\underline{v}=\underline{u}'+\underline{w}'$; dobbiamo dimostrare che $\underline{u}=\underline{u}'$ e $\underline{w}=\underline{w}'$. Ma per ipotesi $\underline{u}+\underline{w}=\underline{u}'+\underline{w}'$ (sono entrambi uguali a $\underline{v}$) e quindi

[1] infatti $((A+A^T)/2)^T=(A^T+(A^T)^T)/2=(A+A^T)/2$ (dove abbiamo utilizzato il fatto, ovvio, che $(A^T)^T=A$)

$\underline{u} - \underline{u}' = \underline{w}' - \underline{w}$; sia $\underline{g}$ il vettore $\underline{u} - \underline{u}'$. Allora $\underline{g} \in U$ (ovviamente); ma per quanto abbiamo scoperto si ha anche $\underline{g} \in W$ (infatti $\underline{g}$ è anche esprimibile come somma di vettori in W). Dato che per ipotesi $U \cap W = \underline{0}$ abbiamo $\underline{g} = \underline{0}$ e quindi $\underline{u} = \underline{u}'$ e $\underline{w} = \underline{w}'$; ne segue che la decomposizione è unica.
Viceversa: se la decomposizione è unica deve essere $U \cap W = \underline{0}$ perché se $\underline{f} \in U \cap W$, $\underline{f} \neq \underline{0}$ allora $\underline{f} = \underline{f} + \underline{0}$ e $\underline{f} = \underline{0} + \underline{f}$ sarebbero due decomposizioni distinte, contro l'ipotesi di unicità. Ne segue che deve essere $\underline{f} = \underline{0}$ da cui $U \cap W = \underline{0}$.

Soluzione esercizio 6.1. Per la linearità delle proiezioni procediamo come segue. Sia $\underline{v} + \underline{v}' \in \mathbb{R}^3$. Allora, rispetto alla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = r \oplus \pi$ sarà $\underline{v} + \underline{v}' = (\underline{v} + \underline{v}')_1 + (\underline{v} + \underline{v}')_2$. D'altra parte possiamo decomporre $\underline{v}$ e $\underline{v}'$ singolarmente e si avrà $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ e $\underline{v}' = \underline{v}_1' + \underline{v}_2'$. Sommando queste due espressioni e applicando le proprieità della somma di vettori otteniamo $\underline{v} + \underline{v}' = (\underline{v}_1 + \underline{v}_1') + (\underline{v}_2 + \underline{v}_2')$ e per l'unicità si ha

$$(\underline{v} + \underline{v}')_1 = \underline{v}_1 + \underline{v}_1', \quad (\underline{v} + \underline{v}')_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_2'$$

che si legge anche

$$P_1(\underline{v} + \underline{v}') = P_1(\underline{v}) + P_1(\underline{v}'), \quad P_2(\underline{v} + \underline{v}') = P_2(\underline{v}) + P_2(\underline{v}')$$

da cui l'additività. La dimostrazione che $P_j(\lambda \underline{v}) = \lambda P_j(\underline{v})$ è simile.

Soluzione esercizio 6.3. È chiaro che l'immagine di P_1 è la retta r; inoltre il nucleo di P_1 sicuramente contiene il piano π (applicate la definizione: se $\underline{v} \in \pi$ allora la sua decomposizione rispetto a $r \oplus \pi$ è $\underline{0} + \underline{v}$ e quindi $P_1\underline{v} = \underline{0}$). Dato che il nucleo ha dimensione $3 - 1 = 2$ ne segue che il nucleo è proprio π. Allo stesso modo si vede che P_2 ha nucleo r e immagine π. Dimostriamo che l'unico vettore nel nucleo di S_1 è il vettore nullo: sia $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$; $S_1\underline{v}$ è uguale per definizione a $\underline{v}_1 - \underline{v}_2$; quindi $S_1\underline{v} = \underline{0}$ se e solo se $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}$ se e solo se $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$ il che implica che $\underline{v}_1 = \underline{0} = \underline{v}_2$ (per definizione di somma diretta). Quindi $\mathrm{Ker}S_1 = \{\underline{0}\}$ e S_1 è iniettiva. Dato che andiamo da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ è anche suriettiva e quindi bigettiva. Allo stesso modo si procede per S_2.